Analisi I - IngBM - 2014-15
COMPITO A 25 Febbraio 2016

COGNOME .... NOME ....

MATRICOLA........................ VALUTAZIONE ..... + ... = ...

1. Istruzioni

Gli esercizi devono essere svolti negli appositi spazi del presente fascicolo; **solo questo sarà ritirato e valutato.** *I fogli a quadretti messi a disposizione possono essere usati liberamente ma in nessun caso saranno ritirati. Il compito è composto di due parti. La prima parte deve essere svolta preliminarmente. Essa verrà corretta per prima e valutata con un punteggio di $0 \le x \le 10$ punti. Condizione necessaria affinché venga preso in considerazione l'eventuale svolgimento della seconda parte è che $x \ge 6$. In tal caso la seconda parte viene valutata con un punteggio di $0 \le y \le 24$ punti. Il compito sarà sufficiente per l'ammissione alla prova orale se $x + y \ge 18$. In tal caso il voto di ammissione all'orale sarà $v = \min(28, x + y)$.*

Attenzione. Tutte le risposte devono essere giustificate.

2. Prima parte

Esercizio 0 (punti 0). Leggere e capire le istruzioni.

Esercizio 1. (3 punti) Sia $\{a_n\}$ una successione di numeri reali positivi per cui esistano m e M tali che per ogni n si abbia $0 < m \le a_n \le M$. Dire se esiste $L = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$ esiste ed in caso affermativo calcolarlo.

SOLUZIONE

☐ Il limite L non esiste

$\boxed{\text{X}}$ Il limite L esiste e vale 1

perché per ogni n si ha $0 < m \le a_n \le M$; ne segue che $\sqrt[n]{m} \le \sqrt[n]{a_n} \le \sqrt[n]{M}$, da cui per il teorema del confronto si ha

$$1 = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{m} \le \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \le \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{M} = 1$$

Esercizio 2. (4 punti) Sia $D(k) = 1 + 3 + 5 + \ldots + (2k - 1)$ la somma dei primi k numeri dispari. Provare per induzione che $D(k) = k^2$

SOLUZIONE.

$D(1) = 1$. Supponiamo vera la proposizione per $k - 1$, cioè $D(k - 1) = (k - 1)^2$ e deduciamone $D(k)$.

$D(k) = 1+3+5+\ldots+(2k-3)+(2k-1) = (k-1)^2+(2k-1) = k^2-2k+1+2k-1 = k^2$.

Esercizio 3. (3 punti)

Sia $p(x)$ una funzione polinomiale. Si caloli il limite

$$\lim_{x\to\infty} p(x)e^{-x}$$

SOLUZIONE.

☐Il limite non esiste $\boxed{\text{X}}$ Il limite esiste e vale 0

perché essendo un polinomio una somma finita di termini del tipo ax^m è sufficiente mostrare che $\lim_{x\to+\infty} x^m e^{-x} = 0$ per ogni m, e questo si ottiene immediatamente con successive applicazioni della regola dell'Hôpital. Si ha

$$\lim_{x\to+\infty} x^m e^{-x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^m}{e^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{mx^{m-1}}{e^x} = \ldots = \lim_{x\to+\infty} \frac{m!}{e^x} = 0.$$

3. Seconda parte

Esercizio 1. (6 punti) Sia $p(x)$ una funzione polinomiale di grado d. Sapendo che $\int p(x)e^{mx} = q(x)e^{mx} + \mathbf{R}$ ove $q(x)$ è una funzione polinomiale, dimostrare che il grado del polinomio $q(x)$ è uguale al grado d del polinomio $p(x)$.

SOLUZIONE.

Se $q(x)e^{mx} + c$ è una primitiva della funzione $p(x)e^{mx}$ si ha

$$\frac{dq(x)e^{mx}}{dx} = q'e^{mx} + mqe^{mx} = e^{mx}(q' + mq) = p(x)e^{mx}$$

da cui $(q' + mq) = p(x)$. Essendo il grado di q' strettamente minore di quello di q si ha che il polinomio $q' + mq$ ha grado uguale a quello di q che quindi deve essere quello di p. Il risultato si poteva ottenere in molti altri modi, ad esempio considerando il processo di integrazione per parti descritto nella dispensa P-ELEMENTARI pag 1 e procedendo per induzione o impostando un sistema lineare nelle incognite *coefficienti del polinomio* q .

Esercizio 2. (8 punti)

Si consideri la formula $f(x) = \max(\frac{1}{2}, \sin x)$.

(1) Si indichi il più grande sottoinsieme $C \subset \mathbf{R}$ per cui la formula definisce una funzione continua da C a $\mathbf{R}$.
(2) Si indichi il più grande sottoinsieme $D \subset \mathbf{R}$ per cui la formula definisce una funzione differenziabile da C a $\mathbf{R}$.
(3) Si descrivano gli insiemi MA dei massimi assoluti e mA dei minimi assoluti della funzione f.
(4) Si descrivano gli insiemi MR dei massimi relativi e mR dei minimi relativi della funzione f.
(5) Si discuta la presenza di eventuali asintoti per il grafico della funzione

SOLUZIONE.

(1) $C = \mathbf{R}$. Le funzioni $\frac{1}{2}$ e $\sin x$ sono funzioni continue su tutto $\mathbf{R}$ e *max* è una procedura che conserva la continuità. (Disp C-ELEMENTARI pag. 1)
(2) Nei punti del chiuso $X = \{\frac{\pi}{6} + 2k\pi\} \cup \{\frac{5\pi}{6} + 2k\pi\}$ (con $k \in \mathbf{Z}$) la funzione non è differenziabile poichè in questi punti il limite del rapporto incrementale non esiste (limite destro $\neq$ limite sinistro). Nei punti del complementare, cioè dell'aperto $\mathbf{R} \setminus X$ la funzione coincide con una funzione differenziabile (o $\frac{1}{2}$ o $\sin x$) e quindi è differenziabile.
(3) L'insieme MA dei massimi assoluti è l'insieme $\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi\}_{k\in\mathbf{Z}}$, dove la funzione vale 1, L'insieme mA dei minimi assoluti è l'insieme $\bigcup_{k\in\mathbf{Z}}[\frac{5\pi}{6}+2k\pi, \frac{\pi}{6}+2(k+1)\pi]$ (con $k \in \mathbf{Z}$), dove la funzione vale $\frac{1}{2}$.
(4) L'insieme MR dei massimi relativi è l'insieme $MA \bigcup_{k\in\mathbf{Z}}(\frac{5\pi}{6}+2k\pi, \frac{\pi}{6}+2(k+1)\pi)$ (con $k \in \mathbf{Z}$).

    L'insieme mR dei minimi relativi coincide con l'insieme mA $= \bigcup_{k\in\mathbf{Z}}[\frac{5\pi}{6} + 2k\pi, \frac{\pi}{6} + 2(k+1)\pi]$.
(5) Il grafico della funzione non presenta asintoti verticali poiché è una funzione limitata; non presenta asintoti obliqui (o orizzontali) poiché non esistono il $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)$ e il $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x}$.

Esercizio 3.(3 punti)
Si descriva l'insieme delle soluzioni della seguente equazione

$$e^{2z} - 2i = 0$$

SOLUZIONE.
$2i = 2(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2})$.
Ricordando che $e^{x+iy} = e^x(\cos y + i\sin y)$ otteniamo
$2x = \ln 2$ e $2y = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ per cui le soluzioni sono i numeri complessi della forma $\ln\sqrt{2} + \frac{\pi}{4}i + k\pi i$ con $k \in \mathbf{Z}$.

Esercizio 4. (7 punti)
Si consideri l'equazione differenziale al primo ordine

$$(t^4 + 9)y' = 2t$$

(1) Si dica se ha soluzioni costanti
(2) Si determini se esiste una soluzione tale che $y(0) = 1$

SOLUZIONE.

(1) L'equazione non ha soluzioni $y(t) = cost$, poiché in tal caso si avrebbe $y'(t) = 0$ che è incompatibile con l'equazione proposta.
(2) L'equazione proposta è a variabili separate, per cui, separando appunto le variabili, si ottiene
$$\int dy = \int \frac{2t}{t^4+9}dt \text{ da cui } y(t) = \frac{1}{3}\arctan\frac{t^2}{3} + c$$
Poichè $c = \arctan(0)$ otteniamo la soluzione $y(t) = \frac{1}{3}\arctan\frac{t^2}{3} + 1$.