Analisi I - IngBM - 2014-15
COMPITO B 25 Luglio 2015

COGNOME .... NOME ....

MATRICOLA .... VALUTAZIONE ..... + ... = ...

1. Istruzioni

Gli esercizi devono essere svolti negli appositi spazi del presente fascicolo; **solo questo sarà ritirato e valutato.** *I fogli a quadretti messi a disposizione possono essere usati liberamente ma in nessun caso saranno ritirati. Il compito è composto di due parti. La prima parte deve essere svolta preliminarmente. Essa verrà corretta per prima e valutata con un punteggio di* $0 \leq x \leq 10$ *punti. Condizione necessaria affinché venga preso in considerazione l'eventuale svolgimento della seconda parte è che* $x \geq 6$. *In tal caso la seconda parte viene valutata con un punteggio di* $0 \leq y \leq 24$ *punti. Il compito sarà sufficiente per l'ammissione alla prova orale se* $x + y \geq 18$. *In tal caso il voto di ammissione all'orale sarà* $v = \min(28, x + y)$.

Attenzione. Tutte le risposte devono essere giustificate.

2. Prima parte

Esercizio 0 (punti 0). Leggere e capire le istruzioni.

Esercizio 1. (3 punti) Sia a_n la successione

$$a_n = \frac{2^n + n^2}{3^n + n^3}$$

Si dica se esiste il limite $L = \lim_{n\to\infty} a_n$ ed in caso affermativo calcolarlo.
SOLUZIONE.

$\square$ Il limite L non esiste $\boxed{\text{X}}$ Il limite L esiste e vale 0

perché si ha $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n(1+\frac{n^2}{2^n})}{3^n(1+\frac{n^3}{3^n})}$ e per i risultati sull'ordine relativo di crescenza di alcune succesioni (vedi dispensa LIMSUCC) si ha $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{2^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{3^n} = 0$ e $\lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{3^n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$..

Esercizio 2. (3 punti) Bianca dice all'amica Anna che tutti i suoi amici sono sinceri o affidabili e Anna risponde di fare attenzione perché a suo giudizio non è vero.
Anna con questo intende dire a Bianca che (barrare la casella corrispondente)

□ Nessun suo amico è sincero e affidabile
□ Tra i suoi amici ci sono amici sinceri ma non affidabili
□ Tra i suoi amici c'è qualcuno che non è sincero o che non è affidabile
$\boxed{\text{X}}$ Bianca ha almeno un amico che non è sincero e non è affidabile.
SPIEGAZIONE. Detti A l'insieme delle persone che Bianca ritiene affidabili ed S quello delle persone che Bianca ritiene sincere, l'affermazione di Bianca è che l'insieme $\mathcal{B}$ i cui elementi sono gli amici di Bianca è un sottoinsieme di $S \cup A$, cioè $\forall a \in \mathcal{B}, a \in S \cup A$.
L'affermazione di Anna è la negazione di questa, cioè $\exists a \in \mathcal{B}, a \notin S \cup A$ cioè $\exists a \in \mathcal{B}, a \in (S \cup A)^c = S^c \cap A^c$ cioè che tra gli amici di Bianca ve ne è almeno uno che è non affidabile e non sincero.(Si è indicato con X^c il complementare dell'insieme X.)

Esercizio 3. (4 punti) Dire quante sono le soluzioni $z \in \mathbf{C}$ dell'equazione

$$e^z = -i$$

che sono nel quadrato $Q = \{[-4\pi, 4\pi] \times [-4\pi, 4\pi]\}$ e quante quelle che sono nel disco D aperto di centro $(2, 2)$ e raggio 1.
SOLUZIONE.
Il numero delle soluzioni nel quadrato Q è 4 e nel disco D è 0
perché le soluzioni complesse dell'equazione data sono i numeri complessi del tipo $(\frac{3\pi}{2} + 2k\pi)i$ e di questi solo 4 cadono nel quadrato, precisamente quelli che si ottengono per i valori di $k = 0, 1, -1, -2$. Essendo tutte le soluzioni sull'asse delle y e non intersecando il disco tale asse nessuna di queste soluzioni è nel disco.

3. Seconda parte

Esercizio 1. (8 punti) Si consideri la funzione f da $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$

$$f = |x+1| + |x-1| - (|x+2| + |x-2|)$$

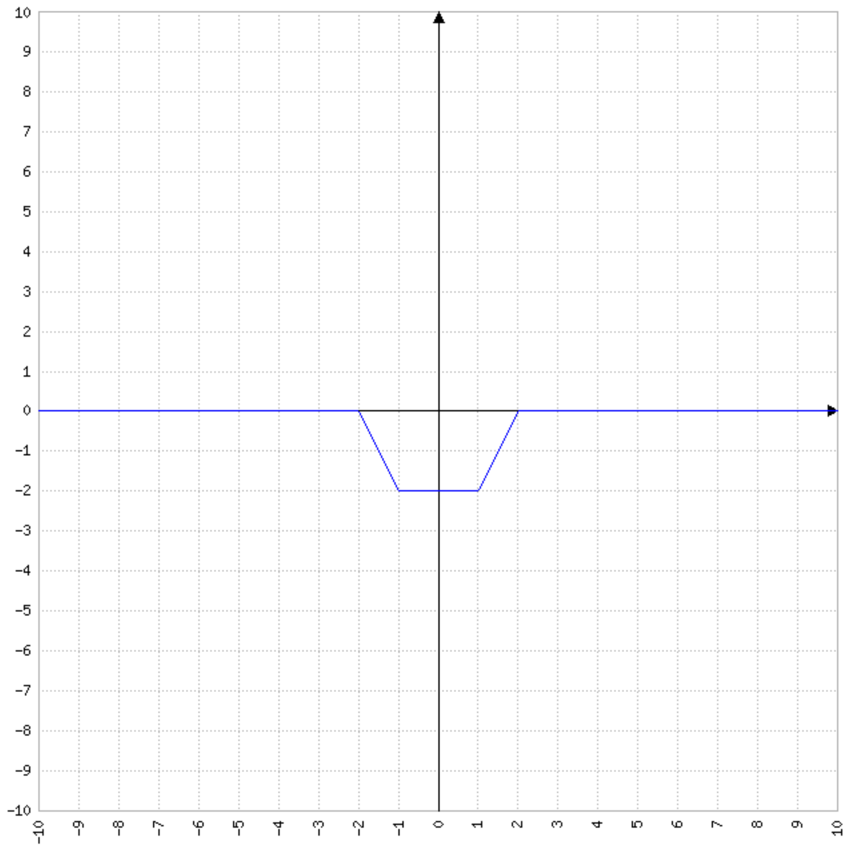
Determinare (se esistono):

(1) L'insieme dei punti C di $\mathbf{R}$ dove la funzione f è continua.
(2) L'insieme dei punti D di $\mathbf{R}$ dove la funzione f è differenziabile.
(3) I punti di minimo e massimo locale della funzione f.
(4) I punti di minimo e massimo assoluto della funzione f.
(5) Gli asintoti del grafico della funzione f.
(6) Per ogni $n \in \mathbb{N}$ poniamo $a_n = \int_0^n f(x)dx$. Dire se esiste finito $\lim_{n\to\infty} a_n$.

SOLUZIONE.

- $C = \mathbf{R}$
- $D = \mathbf{R} - \{-2, -1, 1, 2\}$
- I punti di minimo locale sono i punti dell'insieme $(-\infty, -2) \cup [-1, 1] \cup (2, +\infty)$
- I punti di massimo locale sono i punti dell'insieme $(-\infty, -2] \cup (-1, 1) \cup [2, +\infty)$
- I punti di minimo assoluto sono i punti dell'insieme $[-1, 1]$
- I punti di massimo assoluto sono i punti dell'insieme $(-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$
- Il grafico della funzione ammette la retta $y = 0$ come asintoto.
- La funzione per $n \geq 2$ vale 0, pertanto per $n \geq 2$ abbiamo che $a_n = \int_0^2 f(x)dx + \int_2^n f(x)dx = \int_0^2 f(x)dx$. Quindi il limite esiste e vale $a_2 = \int_0^2 f(x)dx$. Tale valore è finito e questo si può vedere sia ricorrendo alla definizione di integrale definito come area del sottografico della funzione, sia calcolandolo esplicitamente. $a_2 = \int_0^1 f(x)dx + \int_1^2 f(x)dx = \int_0^1 (-2)dx + \int_1^2 (2x-4)dx = -3$

Al fine di rendere più chiara la situazione aggiungiamo il grafico dell'andamento della funzione f



Esercizio 2. (8 punti)
Si provi che per ogni $a \geq 1$ l'equazione

$$\frac{ax-1}{x(x-2)} - \tan(\frac{\pi}{2}(x+1)) = 0$$

ammette almeno una soluzione nell'intervallo $(0,2)$.
SOLUZIONE.
Si osservi che essendo $a > 1$, $\lim_{x\to 0^+} \frac{ax-1}{x(x-2)} = +\infty$ e che $\lim_{x\to 0^+} \tan(\frac{\pi}{2}(x+1)) = -\infty$ pertanto

$$\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{ax-1}{x(x-2)} - \tan(\frac{\pi}{2}(x+1)) \right) = +\infty.$$

Analogamente si ha che $\lim_{x\to 2^-} \frac{ax-1}{x(x-2)} = -\infty$ e $\lim_{x\to 2^-} \tan(\frac{\pi}{2}(x+1)) = +\infty$ da cui

$$\lim_{x\to 2^-} \left(\frac{ax-1}{x(x-2)} - \tan(\frac{\pi}{2}(x+1)) \right) = -\infty.$$

Quindi esistono punti H e K nell'intervallo $(0,2)$ ove la funzione $f = \frac{ax-1}{x(x-2)} - \tan(\frac{\pi}{2}(x+1))$ è positiva e negativa, cioè $f(H) > 0$ e $f(K) < 0$. Quindi essendo la funzione f continua in questo intervallo deve esistere, per il teorema dei valori intermedi, un punto in cui si annulla.

Esercizio 3. (8 punti)
Si trovi la soluzione dell'equazione differenziale
$$y' - y = \sin x$$
tale che $y(0) = 0$.
SOLUZIONE.
È immediato che la soluzione generale dell'equazione omogenea associata è del tipo $y = Ce^x$. Per il calcolo di una soluzione particolare, mantenendo le notazioni della dispensa EQUADIFF1, ci si riconduce al calcolo dell'integrale $\int e^{-x} \sin x dx$. Applicando due volte l'integrazione per parti si ottiene
$$\int e^{-x} \sin x dx = -e^{-x} \sin x + \int e^{-x} \cos x = -e^{-x} \sin x - e^{-x} \cos x - \int e^{-x} \sin x dx$$
da cui $\int e^{-x} \sin x dx = -e^{-x} \frac{\sin x + \cos x}{2}$.
Pertanto l'integrale del problema proposto è
$$ce^x - e^x \left(e^{-x} \frac{\sin x + \cos x}{2} \right) = ce^x - \frac{\sin x + \cos x}{2}.$$
Imponendo la condizione iniziale otteniamo $c = \frac{1}{2}$. Quindi soluzione del problema differenziale proposto è
$$\frac{1}{2} e^x - \frac{\sin x + \cos x}{2}$$
.