Analisi I - IngBM - 2014-15
COMPITO A 4 Luglio 2015

COGNOME .... NOME ....

MATRICOLA .... VALUTAZIONE ..... + ... = ...

1. Istruzioni

Gli esercizi devono essere svolti negli appositi spazi del presente fascicolo; **solo questo sarà ritirato e valutato.** *I fogli a quadretti messi a disposizione possono essere usati liberamente ma in nessun caso saranno ritirati. Il compito è composto di due parti. La prima parte deve essere svolta preliminarmente. Essa verrà corretta per prima e valutata con un punteggio di* $0 \leq x \leq 10$ *punti. Condizione necessaria affinché venga preso in considerazione l'eventuale svolgimento della seconda parte è che* $x \geq 6$. *In tal caso la seconda parte viene valutata con un punteggio di* $0 \leq y \leq 24$ *punti. Il compito sarà sufficiente per l'ammissione alla prova orale se* $x + y \geq 18$. *In tal caso il voto di ammissione all'orale sarà* $v = \min(28, x + y)$.

Attenzione. Tutte le risposte devono essere giustificate.

2. Prima parte

Esercizio 0 (punti 0). Leggere e capire le istruzioni.

Esercizio 1. (3 punti) Si determinino tutti i numeri complessi $z \in \mathbf{C}$ che sono soluzione dell'equazione:

$$(\bar{z} - i)^3 = i \ .$$

SOLUZIONE. Le soluzioni complesse dell'equazione sono: $\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i, \ -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i, \ 0$.

Infatti $(\bar{z} - i)^3 = i$ significa che $\bar{z} - i$ deve essere una delle tre radici cubiche di i, cioè uno dei 3 numeri complessi

$$\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i, \ -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i, \ -i$$

da cui otteniamo $\bar{z} = i + (\pm\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i)$ oppure $\bar{z} = i - i = 0$ cioè in definitiva abbiamo che le soluzioni sono

$$\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i, \ -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i, \ 0$$

Esercizio 2. (7 punti) Si consideri la funzione $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definita dalla formula

$$f(x) = e^{2x}(4x^2 + 4x - 3)$$

Determinare (se esistono):

(1) I punti di minimo e massimo locale della funzione f.
(2) I punti di minimo e massimo assoluto della funzione f.

(3) Gli asintoti del grafico della funzione f.

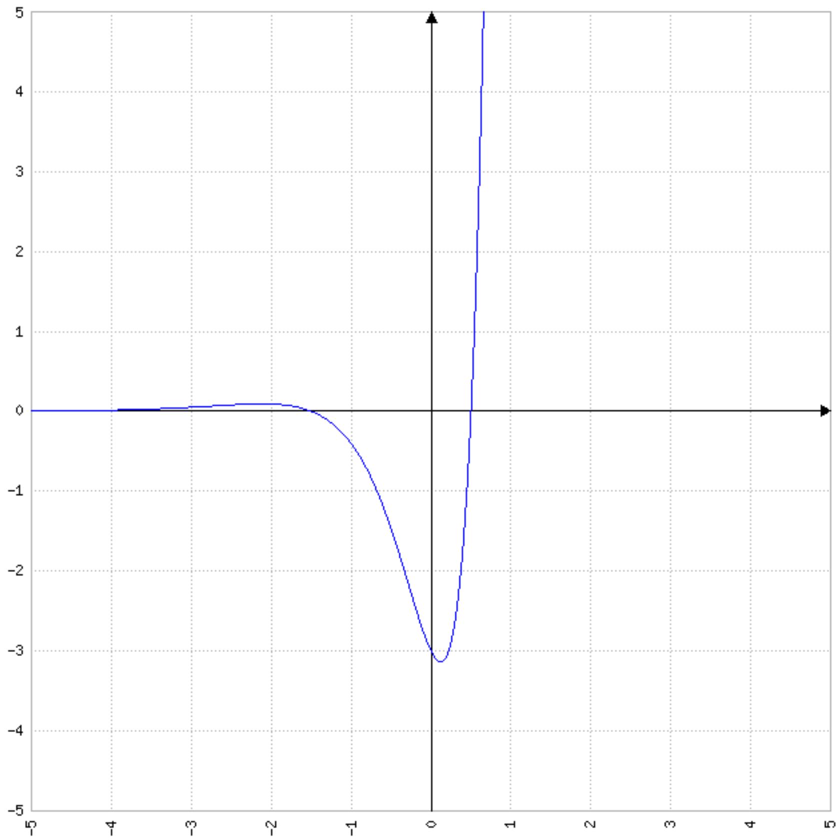
SOLUZIONE. La formula definisce una funzione continua da $\mathbf{R}$ a $\mathbf{R}$, derivabile in tutto il dominio di definizione. Possiamo quindi applicare per il calcolo dei massimi e minimi gli strumenti del calcolo differenziale. Scrivendo la funzione come

$$f = e^{2x}(4x^2 + 4x - 3) = e^{2x}(2x + 3)(2x - 1)$$

si vede immediatamente che la funzione si annulla nei due punti $-\frac{3}{2}$ e $\frac{1}{2}$ dove cambia segno e che quindi la funzione è positiva nell'insieme $\left(-\infty, -\frac{3}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$ e negativa nell'intervallo $\left(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$.
La derivata prima e seconda della funzione risultano rispettivamente

$$\begin{aligned} f' &= 2e^{2x}(4x^2 + 8x - 1) = 2e^{2x}(2x + 2 + \sqrt{5})(2x + 2 - \sqrt{5})) \\ f'' &= 4e^{2x}(4x^2 + 12x - 3) = 4e^{2x}(2x + 3 + 2\sqrt{3})(2x + 3 - 2\sqrt{3}). \end{aligned}$$

I teoremi del calcolo differenziale ci permettono di affermare che la funzione ha un punto di massimo locale in $-1 - \frac{\sqrt{5}}{2}$ e uno di minimo local e in $-1 + \frac{\sqrt{5}}{2}$. Tale punto risulta anche essere un punto di minimo assoluto poiché, dallo studio del segno della derivata risulta che lo è nell'intervallo $\left(-1 - \frac{\sqrt{5}}{2}, -1 + \frac{\sqrt{5}}{2}\right)$ dove la funzione è negativa (e nulla agli estremi) e al di fuori di questo intervallo la funzione è positiva. Poiché la funzione al tendere di x a $+\infty$ tende a $+\infty$, il punto di massimo è solo un punto di massimo locale e la funzione non ha punti di massimo assoluto nel suo insieme di definizione.
Per calcolare gli asintoti osserviamo che non vi sono asintoti verticali, che essendo $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ non vi sono asintoti obliqui nella parte destra del grafico e che essendo $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$ (come risulta immediatamente applicando il teorema di de l' Hôpital) l'asse delle x è un asintoto orizzontale per la parte sinistra del grafico.
Includiamo un grafico che illustra il comportamento qualitativo della funzione.



3. Seconda parte

Esercizio 1. (7 punti) Calcolare il seguente integrale definito

$$I = \int_0^2 \frac{2x^3}{x^2+4x+3} dx$$

SOLUZIONE
$I = -12 + 27 \log 5 - 28 \log 3$
Infatti, utilizzando procedimenti standard, l'integrale può scriversi

$$I = \int_0^2 \frac{2x^3}{x^2+4x+3} dx = \int_0^2 \left(2x - 8 + \frac{26x+24}{(x+1)(x+3)}\right) dx = \int_0^2 \left(2x - 8 + \frac{27}{x+3} - \frac{1}{x+1}\right) dx$$

da cui otteniamo

$$I = \left[x^2 - 8x + 27 \log|x+3| - \log|x+1|\right]_0^2 = -12 + 27 \log 5 - 28 \log 3$$

Esercizio 2. (7 punti) Si consideri la formula

$$f(x) = x^2 \log_e(x)$$

(1) Giustificare che la formula definisce una funzione derivabile $f : (0, +\infty) \to \mathbf{R}$.
(2) Dimostrare che esistono $\varepsilon > 0$ ed un intervallo aperto non vuoto $J \subset \mathbf{R}$ tali che: l'intorno $I(e, \varepsilon)$ del punto e è contenuto in $(0, +\infty)$, $J = f(I(e, \varepsilon))$ e la

restrizione $f_| : I(e,\varepsilon) \to J$ è una funzione bigettiva con inversa $g : J \to I(e,\varepsilon)$ derivabile.

(3) Calcolare $g'(f(e))$.

SOLUZIONE.
La formula definisce una funzione derivabile $f : (0,+\infty) \to \mathbf{R}$ poiché risulta ottenuta come prodotto della funzione polinomiale x^2 e della funzione $\log_e x$, entrambe derivabili in tale insieme.
Si osservi che $f'(x) = x(2\log_e x + 1)$ per cui in tutto l'intervallo $(1,\infty)$ la derivata è strettamente positiva, cioè la funzione f risulta in tale intervallo monotona crescente, quindi iniettiva e pertanto invertibile. Prendendo $\varepsilon = e - 1$ si ha che

- $I(e,\varepsilon) = (1, 2e-1) \subset (0,+\infty)$
- $f(I(e,\varepsilon)) = f(1,2e-1) = (0,(2e-1)^2\log_e(2e-1)) = J$[1]
- La funzione inversa g risulta differenziabile su J poichè per ogn i $x \in I$ risulta $f'(x) \neq 0$ (cfr. dispensa [DERIVATE] pag 3).
- $g'(f(e)) = \dfrac{1}{f'(e)} = \dfrac{1}{3e}$

Esercizio 3. (10 punti) Si trovi la soluzione dell'equazione differenziale

$$y'' - 4y' + 3y = e^x$$

tale che $y(0) = 0$ e $y'(0) = 0$

SOLUZIONE Con le procedure standard si vede che, essendo 1 e 3 le radici dell'equazione caratteristica, la soluzione generale dell'equazione omogenea associata è del tipo $Ae^x + Be^{3x}$. Ai fini della ricerca di una soluzione particolare dell'equazione non omogenea, essendo la funzione a termine noto a sua volta soluzione ell'equazione omogenea, per le considerazioni usuali, (cfr ad esempio dispensa EQUADIFF2 pag 11), si ha che una soluzione particolare sarà del tipo λxe^x: facendo gli opportuni calcoli otteniamo che la funzione $-\dfrac{1}{2}xe^x$ è una soluzione particolare.

Quindi la soluzione generale dell'equazione proposta è $Ae^x + Be^{3x} - \dfrac{1}{2}xe^x$.

Impomemdo infine le condizioni iniziali richieste si ha $A = -\dfrac{1}{4}$ e $B = \dfrac{1}{4}$, cioè $y = -\dfrac{1}{4}e^x + \dfrac{1}{4}e^{3x} - \dfrac{1}{2}xe^x$.

[1] Si ricordi che il teorema dei valori intermedi garantisce che l 'immagine dell' intervallo $[\alpha,\beta]$ per una funzione continua monotona crescente risulta essere l' intervallo $[f(\alpha), f(\beta)]$.