November 9, 2018

SIMBOLI E CELLE DI SCHUBERT

Consideriamo su $M(m,n,\mathbf{K}) = \mathrm{Hom}(\mathbf{K}^n,\mathbf{K}^m)$ la relazione di equivalenza $A \sim_D B$ se e solo se esiste $P \in GL(n,\mathbf{K})$ tale che $B = AP$.

Lo spazio generato dalle colonne è invariante, cioè se $A \sim_D B$ allora $\mathrm{Im}(A) = \mathrm{Im}(B)$, quindi a maggior ragione anche il rango lo è. Per ogni $0 \le r \le \min\{m,n\}$, indichiamo con $M_r(m,n,\mathbf{K})$ il sottoinsieme di $M(m,n,\mathbf{K})$ formato dalle matrici di rango r; $M(m,n,\mathbf{K})$ è l'unione disgiunta degli insiemi $M_r(m,n,\mathbf{K})$ al variare del rango r, e la relazione $\sim_D$ si restringe a ciascuno di essi.

Per semplicità, restringiamo la nostra analisi al caso di *rango massimo* $r = \min\{m,n\}$. Dunque siamo nel *regime surgettivo* se $n \ge m$, nel *regime iniettivo* se $n \le m$. L'intersezione dei due regimi è dato da $m = n = r$, cioè dagli *isomorfismi* $GL(n,\mathbf{K})$.

Per ogni $A \in M(m,n,\mathbf{K})$, indichiamo con $\hat{A}_C$ la matrice in forma a scalini ottenuta applicando ad A l'algoritmo di Gauss (completo) rispetto alle colonne; chiaramente $\hat{A}_C \in [A]_D$.

1. Regime surgettivo

In questo caso

$$\hat{A}_C = J_m(m,n)$$

dove quest'ultima è la matrice a blocchi

$$J_n(m,n) = (I_m \mid 0_{m,n-m}) \ .$$

Ne segue immediatamente che il quoziente $M_m(m,n,\mathbf{K})/D$ è ridotto ad un solo punto e $J_m(m,n)$ è il *rappresentante in forma normale* dell'unica classe di equivalenza.

2. Regime iniettivo

Questo è più complesso da analizzare. Sia $\hat{A}_C$ come sopra. Il suo *simbolo di Schubert*

$$s = s(\hat{A}_C) = (s_1,\dots,s_n)$$

è definito ponendo s_j *uguale all'indice di riga del j-esimo pivot di* $\hat{A}_C$. Quindi

$$1 \le s_1 < s_2 < \cdots < s_n \le m \ .$$

Al variare della matrice $\hat{A}_C$ si realizzano $\binom{m}{n}$ simboli. Poniamo

$$L := \mathrm{Im}(\hat{A}_C) = \mathrm{Im}(A) \ ;$$

L è un sottospazio di $\mathbf{K}^m$ e $\dim L = n$. Poniamo per $j = 0,\dots,m$,

$$p_j : \mathbf{K}^m \to \mathbf{K}^{m-j},\ p_j(X) = p_j((x_1,\dots,x_m)^t) := (x_1,\dots,x_{m-j})^t$$

$$d_j = \dim(p_j(L)) \ .$$

Allora si ha:

Proposizione 1. *La dimensione d_j varia da n a 0 in modo monotono diminuendo di 1 esattamente passando da d_{s_i+1} a d_{s_i}, per i che decresce passando da n a 0. Ne segue che il simbolo $s = s(L)$ dipende solo da L, quindi può essere definito ponendo*

$$s(A) := s(\mathrm{Im}(A))$$

per ogni $A \in M_n(m,n,\mathbf{K})$ ed è costante sulla classe di equivalenza $[A]_D$.

Dimostrazione: Segue immediatamente dalla forma a scalini di $\hat{A}_C$.

□

Per ogni simbolo s, poniamo

$$M_{n,s}(m,n,\mathbf{K})$$

l'insieme delle matrici in $M_n(m,n,\mathbf{K})$ tali che $s(A)=s$; allora $M_n(m,n,\mathbf{K})$ è l'unione disgiunta di questi $M_{n,s}(m,n,\mathbf{K})$ al variare di s, e la relazione $\sim_D$ si restringe su ciascuno di essi. Fissiamo un simbolo s. Allora si ha:

Proposizione 2. *Siano $A,B \in M_{n,s}(m,n,\mathbf{K})$. Se* $\mathrm{Im}(A)$=$\mathrm{Im}(B)$*, allora $\hat{A}_C = \hat{B}_C$.*

Dimostrazione: Poniamo $L = \mathrm{Im}(A)$. Ricordiamo che $s = s(L) = s(A) = s(\hat{A}_C)$. Sia

$$p_s : \mathbf{K}^m \to \mathbf{K}^n,\ p_s(X) = (x_{s_1},\dots,x_{s_n})^t \ .$$

È facile verificare, usando $\hat{A}_C$, che la restrizione di p_s su L

$$p_s|L : L \to \mathbf{K}^n$$

è un isomorfismo e che le colonne di $\hat{A}_C$ formano l'unica base di L che viene inviata da $p_s|L$ nella base canonica di $\mathbf{K}^n$. Quindi $\hat{A}_C$ è completamente determinata da L e la proposizione segue.

□

Il seguente corollario è immediato.

Corollario 1. *(1) siano $A,B \in M_n(m,n,\mathbf{K})$ (regime iniettivo); allora $A \sim_D B$ se e solo se* $\mathrm{Im}(A)$=$\mathrm{Im}(B)$*.*

(2) Per ogni A come sopra, $\hat{A}_C$ è il rappresentante in forma normale della classe di equivalenza $[A]_D$.

□

Possiamo riformulare i risultati precedenti (nel regime iniettivo) come segue. Definiamo *l'insieme di Grassmann $G_{m,n}$* formato dai sottospazi vettoriali di $\mathbf{K}^m$ di dimensione uguale a n. Allora l' applicazione

$$\pi : M_n(m,n,\mathbf{K}) \to G_{m,n},\ \pi(A) = \mathrm{Im}(A)$$

è surgettiva e $A \sim_D B$ se e solo se $\pi(A) = \pi(B)$. Quindi $G_{m,n}$ può essere identificato con l'insieme quoziente per la relazione $\sim_D$:

$$G_{m,n} = M_n(m,n,\mathbf{K})/D$$

e π si identifica con la proiezione naturale sul quoziente. Per ogni $A \in M_n(m,n,\mathbf{K})$, $L = \mathrm{Im}(A)$,

$$[A]_D = \pi^{-1}(L) \ .$$

Per ognuno dei possibili $\binom{m}{n}$ simboli s, poniamo

$$B_s = \{L \in G_{m,n};\ s(L) = s\} \ .$$

Quindi $G_{m,n}$ è l'unione disgiunta degli insiemi B_s al variare di s. Per ogni s come sopra, poniamo

$$\mathcal{A}_{C,s} = \{\hat{A}_C \in M_n(m,n,\mathbf{K});\ s(\hat{A}_C) = s\} \ .$$

Questi sottoinsiemi di $M_n(m,n,\mathbf{K})$ sono due a due disgiunti e per ogni s, la restrizione di π su $\mathcal{A}_{C,s}$,

$$\pi_s : \mathcal{A}_{C,s} \to B_s$$

è *bigettiva.*

Possiamo esplicitare la struttura di ogni $\mathcal{A}_{C,s}$. Sia J_s definita come *l'unica matrice in $\mathcal{A}_{C,s}$ le cui entrate diverse dai pivot sono uguali a zero.* Definiamo

$$\phi_s : \mathcal{A}_{C,s} \to M(m,n,\mathbf{K}),\ \phi_s(\hat{A}_C) = \hat{A}_C - J_s$$

$$\mathcal{V}_s = \mathrm{Im}(\phi_s)$$

chiaramente

$$\phi_s : \mathcal{A}_{C,s} \to \mathcal{V}_s$$

è bigettiva per cui

$$\mathcal{A}_{C,s} = J_s + \mathcal{V}_s \ .$$

Abbiamo

Proposizione 3. *Per ogni simbolo* $s = (s_1, \dots s_n)$, $\mathcal{V}_s$ *è un sottospazio vettoriale di* $M(m, n, \mathbf{K})$ *di dimensione*

$$d_s := \dim \mathcal{V}_s = \sum_{j=1}^{n} (m - s_j - (n - j)) \ .$$

Dimostrazione: Ogni matrice di $\mathcal{V}_s$ è caratterizzata da avere un pacchetto di entrate necessariamente nulle che dipende unicamente dal simbolo s. Le altre entrate sono parametri liberi; la formula della dimensione ha per j-esimo addendo il numero di parametri liberi che si trovano sulla j-esima colonna.

□

Quindi, usando un sistema di coordinate su $\mathcal{V}_s$ e componendo con ϕ_s^{-1} e poi con la restrizione della proiezione π su $\mathcal{A}_{C,s}$, vediamo che ogni sottoinsieme B_s dell'insieme di Grassmann ammette una parametrizzazione

$$\psi_s : \mathbf{K}^{d_s} \to B_s$$

e (per questo) è detto *la cella di Schubert di* $G_{m,n}$ *di simbolo* s *e dimensione* d_s.

Osservazioni ed esempi. (1) La dimensione massima delle celle di Schubert è

$$d_{max} = n(m - n)$$

ed è realizzata unicamente dal simbolo $s_{max} = (1, 2, 3, \dots, n)$. La dimensione minima è

$$d_{min} = 0$$

ed è realizzata unicamente dal simbolo

$$s_{min} = (m - n + 1, \dots, m) \ .$$

(2) I simboli, e quindi le celle, di Schubert sono odinati ponendo $s' \leq s$ se e solo se $s'_j \geq s_j$ per ogni $j = 1, \dots, n$ (notare l'inversione delle disuguaglianze nella definizione di questo ordinamento). Questo ordinamento è compatibile con quello delle celle dato dalla dimensione: se $s' \leq s$, allora $d_{s'} \leq d_s$ e quest'ultima è una uguaglianza se e solo se $s = s'$. A volte si dice anche che se $s' \leq s$, allora la cella $B_{s'}$ è una "faccia" della cella B_s. Per esempio tutte le celle sono una faccia di $B_{s_{max}}$. $B_{s_{min}}$ è una faccia di ogni cella.

(3) Nel caso di $G_{m,1}$, gli m simboli sono

$$(1), (2), \dots, (m)$$

$$d_{(j)} = j - 1$$

$B_{(j')}$ è faccia di ogni $B_{(j)}$, per $j \geq j'$.

(4) Per esempio $G_{4,2}$ ha sei celle corrispondenti ai simboli $(1, 2)$, $(1, 3)$, $(1, 4)$, $(2, 3)$, $(2, 4)$, $(3, 4)$, di rispettiva dimensione $4, 3, 2, 2, 1, 0$. La 1-cella corrispondente a $(2, 4)$ è faccia comune delle due 2-celle corrispondenti a $(1, 4)$ e $(2, 3)$.

3. Sulla relazione $A \sim_S B$

Trasponendo e sostituendo ovunque "colonna" con "riga" abbiamo un trattamento "duale" (ancora per semplicità esplicitato nel regime di rango massimo) della relazione per cui $A \sim_S B$ se e solo se esiste $Q \in GL(m, \mathbf{K})$ tale che $B = QA$. In particolare abbiamo

Proposizione 4. $A \sim_S B$ *se e solo se* $\mathrm{Ker}(A)$=$\mathrm{Ker}(B)$. *Per ogni* A, $\hat{A}_R$ *è il rappresentante in forma normale di* $[A]_S$. *Nel regime iniettivo il quoziente* $M_n(m, n, \mathbf{K})/S$ *è ridotto ad un punto e* $J_{s_{max}}$ *è il rappresentante in forma normale dell'unica classe di equivalenza. Nel regime surgettivo si identifica con* $G_{n,n-m}$.

□

4. Simboli e celle di Schubert relativi ad un arbitrario sistema di coordinate su $\mathbf{K}^m$

Mettiamoci come prima nel regime iniettivo e consideriamo $M_n(m, n, \mathbf{K})/D$ e $M_n(m, n, \mathbf{K})/S$. La discussione che abbiamo fatto introducendo i simboli e le celle di Schubert ha utilizzato le coordinate su $\mathbf{K}^m$ relative alla base canonica di $\mathbf{K}^m$. Ma può essere ripetuta *verbatim* utilizzando un qualsiasi sitema di coordinate X' per cui $X = QX'$ per qualche $Q \in GL(m, \mathbf{K})$. Per mezzo di un tale cambiamento di coordinate, ogni $A \in M_n(m, n, \mathbf{K})$ viene trasformata in $A' = QA$, cioè $A \sim_S A'$. Il fatto che

$$M_n(m, n, \mathbf{K})/S = \{[J_{s_{max}}]_S\}$$

significa che per ogni A esite Q tale che $QJ_{s_{max}} = A$. Quindi A è contenuta nella cella di dimensione massima relativamente al sistema di coordinate per cui $X = QX'$. Ne segue che $G_{m,n}$ è ricoperto da un insieme di celle (relative a diversi sistemi di cordinate) ciascuna delle quali, sia B, ammette una parametrizzazione

$$\psi : \mathbf{K}^{n(m-n)} \to B\ .$$

Non è difficile mostrare che in effetti basta un numero finito di queste celle di dimensione massima per ricoprire tutto $G_{m,n}$.

Una considerazione finale: ogni sottospazio $L \in G_{m,n}$ può essere descritto in due modi "duali" l'uno rispetto all'altro: in modo *parametrico*, fissando una base di L ed esprimendo ogni vettore di L per mezzo delle sue relative coordinate (i "parametri" che lo individuano); oppure in modo *implicito* detto anche "Cartesiano" come nucleo di qualche applicazione lineare surgettiva $A : \mathbf{K}^m \to \mathbf{K}^{m-n}$ (cioè come spazio delle soluzioni di un opportuno sistema omogeneo di equazioni lineari). Per ogni tale L, l'unica $\hat{A}_C \in M_n(m, n, \mathbf{K})$ tale che $\mathrm{Im}(\hat{A}_C) = L$ fornisce la rappresentazione parametrica canonica di L (relativamente alla base canonica di $\mathbf{K}^m$); l' unica $\hat{A}_R \in M_{m-n}(m - n, m, \mathbf{K})$ tale che $L = \mathrm{Ker}(\hat{A}_R)$, fornisce la rappresentazione Cartesiana canonica di L (ancora una volta, relativamente alla base canonica di $\mathbf{K}^m$).