**Analisi I - IngBM - 2013-14**
**COMPITO A 14 Giugno 2014**

COGNOME ........................ NOME .............................

MATRICOLA ....................... VALUTAZIONE ..... + ..... = ......

## 1. Istruzioni

*Gli esercizi devono essere svolti negli appositi spazi del presente fascicolo;* **solo questo sarà ritirato e valutato.** *I fogli a quadretti messi a disposizione possono essere usati liberamente ma in nessun caso saranno ritirati. Il compito è composto di due parti. La prima parte deve essere svolta preliminarmente. Essa verrà corretta per prima e valutata con un punteggio di* $0 \leq x \leq 10$ *punti. Condizione necessaria affinché venga preso in considerazione l'eventuale svolgimento della seconda parte è che* $x \geq 6$. *In tal caso la seconda parte viene valutata con un punteggio di* $0 \leq y \leq 24$ *punti. Il compito sarà sufficiente per l'ammissione alla prova orale se* $x+y \geq 19$. *In tal caso il voto di ammissione all'orale sarà* $v = \min(28, x+y)$.

## 2. Prima parte

**Esercizio 0 (punti 0).** Leggere e capire le istruzioni.

**Esercizio 1.(2 punti)** Calcolare, se esiste, il limite

$$L = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^n + n}$$

giustificando il risultato ottenuto.

SOLUZIONE.

$\square$ Il limite $L$ non esiste perché

$\boxed{\text{x}}$ L=2. Infatti $2^n + n = 2^n(1 + (n/2^n))$, $\lim_{n\to+\infty}(1+(n/2^n)) = 1$, $L = 2\lim_n \sqrt[n]{1} = 2$.
Si poteva anche osservare che definitivamente si ha $2^n \leq 2^n + n \leq 2^n + 2^n = 2 \cdot 2^n$ da cui prendendo le radici n-esime si ottiene $2 \leq \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^n+n} \leq 2\sqrt[n]{2}$. Il risultato segue dal fatto che $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2} = 1$.

**Esercizio 2.(8 punti)**

a) Determinare il più grande sottoinsieme $D$ di $\mathbf{R}$ tale che la formula $f(x) = \dfrac{xe^x}{1+e^x}$ definisca una funzione $f : D \to \mathbf{R}$.

b) Dire se esiste un sottoinsieme $D' \subset \mathbf{R}$ contenente propriamente $D$ e una funzione $F$ continua su $D'$ che estende $f$.

c) Calcolare gli eventuali asintoti del grafico della funzione $f(x)$

d) Dire se la funzione $f(x)$ ammette un minimo locale nell'intervallo $[-2, 0]$

e) Riassumere le informazioni sulla funzione disegnandone un grafico.

SOLUZIONE.

(a), (b) $D = \mathbf{R}$. $f$ è una funzione elementare continua definita su tutto $\mathbf{R}$, quindi non esiste alcuna estensione propria di $D$ e di $f$.

c) Il grafico di $f$

☐ non ammette asintoti

$\boxed{\text{x}}$ ha come asintoti le rette di equazione

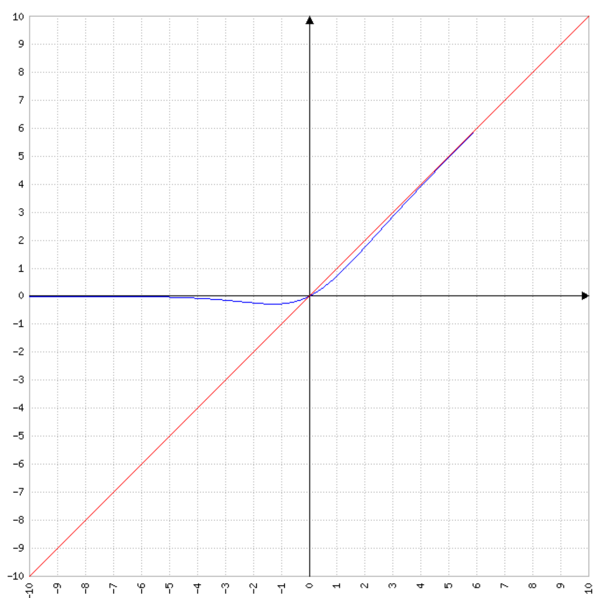
$y = 0$ asintoto orizzontale per $x \to -\infty$ e $y = x$ asintoto obliquo per $x \to +\infty$.

d) Nell'intervallo $[-2, 0]$ la funzione $f$

$\boxed{\text{x}}$ ammette un minimo locale ☐ non ammette un minimo locale

Poiché $f$ è continua la sua restrizione all'intervallo chiuso e limitato $[-2, 0]$ ammette un punto di minimo assoluto; se dimostriamo che appartiene all'intervallo aperto $(-2, 0)$, allora questo è un punto di minimo locale per per $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$. Osserviamo che $f(0) = 0$, $f < 0$ su $[-2, 0)$, $f'(-2) < 0$, $f'$ e' una funzione elementare continua definita su tutto $\mathbf{R}$. Per la permanenza del segno, $f' < 0$ in un intorno di $-2$, quindi nell'intervallo aperto $(-2, 0)$ ci sono punti che prendono valori strettamente minori di $f(0)$ e $f(-2)$ e i punti di minimo della restrizione di $f$ a [-2,0] sono interni come volevamo dimostrare.

e) Grafico di $f$:



## 3. Seconda parte

**Esercizio 1.(2 punti)** Una funzione $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ si dice *moltiplicativa* se $\forall x, y \in \mathbf{R}$, $f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y)$. Dare, negando questa definizione, una definizione di funzione *non moltiplicativa*.

SOLUZIONE.
Una funzione $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ si dice *non moltiplicativa* se esiste una coppia $x, y \in \mathbf{R}$ tale che $f(x \cdot y) \neq f(x) \cdot f(y)$.

**Esercizio 2.(4 punti)** Siano $A$ e $B$ due insiemi finiti, $|A| = 2$, $|B| = 4$. Sia $C \subset B$, $|C| = 2$. Sia $D = \{f : A \to B;\ \mathrm{Im}(f) \text{ non è contenuta in } C\}$. Determinare $|D|$, giustificando il risultato ottenuto.
SOLUZIONE.
$|D| = 12$. Infatti: l'insieme di tutte le applicazioni $f : A \to B$ ha $|B|^{|A|} = 4^2 = 16$ elementi; l'insieme delle applicazioni $f : A \to C$ ha $4$ elementi. Quindi l'insieme $D$, che è il suo complementare, ha $16 - 4 = 12$ elementi

**Esercizio 3.(4 punti)**
(1) Verificare che $3i \in \mathbf{C}$ è una radice del polinomio

$$p(z) = z^4 + z^3 + 8z^2 + 9z - 9\ .$$

(2) Determinare tutte le radici complesse di $p(z)$.

SOLUZIONE.
(1) $p(3i) = 81 - 27i - 72 + 27i - 9 = 0$

(2) Le radici complesse del polinomio sono $\pm 3i$, $\dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Infatti, poichè $p(z)$ è a coefficienti reali, anche -3i è una radice. Per la divisione con il resto sui polinomi, si ha che $p(z) = (z - 3i)(z + 3i)q(z) = (z^2 + 9)(z^2 + z - 1)$ e il secondo fattore ha come radici $z = \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

**Esercizio 4.(5 punti)**Sia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ una funzione continua tale che $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$. Dimostrare che l'equazione

$$f^2(x) - 3x + 2 = 0$$

ammette almeno una soluzione nell'insieme $(0, \infty)$

SOLUZIONE.
Poniamo $g(x) = f^2(x) - 3x + 2$. $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ è continua perché è somma di funzioni continue. $g(0) = f^2(0) + 2 \geq 2 > 0$. $\lim_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$. Per la permanenza del segno esiste $a > 0$ tale che $g(a) < 0$. Dunque la restrizione di $g$ all'intervallo $[0, a]$ è continua e $g(0)g(a) < 0$. Per il teorema degli zeri esiste $b \in (0, a)$ tale che $g(b) = f^2(b) - 3b + 2 = 0$.

**Esercizio 5.(9 punti)**Sia $\alpha$ un numero reale. Si consideri la soluzione $f_\alpha$ dell'equazione differenziale

$$\frac{dy}{dx} = y(y-1)$$

che verifica la condizione $y(0) = \alpha$.

(1) Dire per quali valori del parametro $\alpha$ la soluzione $f_\alpha$ non è definita su tutto $\mathbf{R}$.

(2) Dire se per qualche valore del parametro $\alpha$ la soluzione $f_\alpha$ è costante.

(3) Disegnare il grafico di $f_\alpha$ per $\alpha = -1$

SOLUZIONE Con i procedementi standard, essendo $\frac{1}{y(y-1)} = \frac{1}{y-1} - \frac{1}{y}$ si vede facilmente che l'integrale generale è esprimibile in forma implicita come $\log \left| \frac{y-1}{y} \right| = x + C$.
Da cui otteniamo per l'integrale generale una espressione del tipo $y = \frac{1}{1-ke^x}$ ove abbiamo indicato con $k$ la costante risultante ed abbiamo eliminato il modulo utilizzando appunto tale costante $k$.
Imponendo la condizione $y(0) = \alpha$ otteniamo per $k$ il valore $k = \frac{\alpha-1}{\alpha}$ e quindi in definitiva $y = \frac{\alpha}{\alpha-(\alpha-1)e^x}$
Essendo $e^x$ una funzione surgettiva su $\mathbf{R}^+$ abbiamo che per ogni $\alpha$ tale che $\frac{\alpha}{\alpha-1} > 0$, cioè per ogni $\alpha$ con $\alpha < 0$ e $\alpha > 1$, la soluzione non è definita su tutto $\mathbf{R}$.
Le soluzioni costanti della equazione differenziale sono $y = 0$ e $y = 1$ che si ottengono appunto per i valori 0 e 1 di $\alpha$.
Grafico di $f_{-1}$