

Analisi I BM - 2014-15 - Esercizi, foglio 1.

Esercizio 1. Dati tre insiemi A, B, C , dimostrare che

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

Esercizio 2. Dati due insiemi A e B , dimostrare che $A \setminus (A \setminus B) = A \cap B$.

Esercizio 3. Data una funzione $f : A \rightarrow B$ e $C \subseteq B$, dimostrare che $f^{-1}(C) = f^{-1}(C \cap f(A))$.

Esercizio 4. Sia $h = f \circ g$ una funzione composta; dimostrare che:

- Se h è iniettiva allora g è iniettiva.
- Se h è surgettiva allora f è surgettiva.

Esercizio 5. Dato un insieme X e due sottoinsiemi $A, B \subseteq X$. Dimostrare che $C_X((A \cup B) \setminus (A \cap B)) = A \cap B$ se e solo se $X = A \cup B$.

Esercizio 6. Sia data una funzione $f : A \rightarrow B$ e due sottoinsiemi di B , $C, C' \subseteq B$. Discutere se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- Se $C' \subseteq C$, allora $f^{-1}(C') \subseteq f^{-1}(C)$.
- Se $f^{-1}(C') \subseteq f^{-1}(C)$, allora $C' \subseteq C$.

Esercizio 7. Sia data $f : A \rightarrow A$ una funzione bigettiva. E' vero o falso che esiste sempre $a \in A$ tale che $f(a) = a$?

Esercizio 8. Sia X un insieme, discutere se l'applicazione

$$C_X : \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(X)$$

che associa ad ogni sottoinsieme $A \subseteq X$ l'insieme complementare $C_X(A)$ è rispettivamente iniettiva o surgettiva.

Esercizio 9. Siano $f : A \rightarrow A$ e $g : A \rightarrow A$ due funzioni tali che per ogni $x \in A$, $g \circ f(x) = x$. E' sempre vero che allora f è bigettiva e $g = f^{-1}$?

Esercizio 10. Sia $f : A \rightarrow B$ una funzione e $G(f) \subseteq A \times B$ il suo grafico. Poniamo $H(f) := \{(b, a) \in B \times A \mid b = f(a)\}$. $H(f)$ è sempre il grafico $G(g)$ di una funzione $g : B \rightarrow A$? Non lo è mai? Lo è a volte (quando)?