Analisi I BM - 2014-15 - Esercizi, foglio 10.

Per risolvere gli esercizi si possono utilizzare tutti gli strumenti del calcolo differenziale sviluppati per studiare le forme indeterminate ecc.

Esercizio 1. Calcolare $\lim_{x\to 0} \dfrac{\cos(x) - e^{-x^2/2}}{(\sin(x))^4}$

Esercizio 2. Calcolare $\lim_{x\to 0} (\cos(x))^{1/x^2}$.

Esercizio 3. Data $f(x) = \sin(x^2) - x^2$, determinare $n \in \mathbb{N}$ e $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, tale che $f(x) = ax^n(1 + \epsilon(x))$ dove $\lim_{x\to 0} \epsilon(x) = 0$.

Esercizio 4. Data $f(x) = x^3 \sin^2(x) + (1 + x)^4$, determinare una funzione polinomiale di terzo grado $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$ tale che $f(x) = p(x) + x^n\epsilon(x)$, dove $\lim_{x\to 0} \epsilon(x) = 0$.

Esercizio 5. (a) Determinare l'asintoto della funzione $f(x) = \sqrt[3]{1 + x^2 + x^3}$ per $x \to +\infty$.

(b) Determinare la posizione del grafico di f rispetto all'asintoto per $x \to +\infty$ (cioè il grafico sta definitivamente sotto l'asintoto? Sopra? Oscilla intorno all'asintoto?)

Esercizio 6. (a) Determinare la retta tangente al grafico della funzione $f(x) = \sinh(\sin(x))$ nel punto $(0, f(0))$.

(b) Determinare la posizione del grafico rispetto alla retta tangente quando $x \to 0$.

Esercizio 7. Determinare l'asintoto e la posizione del grafico rispetto all'asintoto per $x \to +\infty$ della funzione $f(x) = \log(\cosh(x))$.

Esercizio 8. Dimostrare che la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, non è uniformemente continua.

Esercizio 9. Dimostrare che la funzione $f : \{x > 0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 1/x$, non è uniformemente continua.

Esercizio 10. Dimostrare che per ogni $a \in \mathbb{R}$, la funzione $f : \{x \leq a\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$, è uniformemente continua.

Esercizio 11. Sia $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = -1$ se $x < 1 + \sqrt{3}$, $f(x) = 2$ se $x \geq 1 + \sqrt{3}$. Dimostrare che f è continua ma non uniformemente continua.

Esercizio 12. Sia D un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ compatto per successioni (cioè equivalentemente, come sappiamo da un esercizio di un foglio precedente, D chiuso e limitato). Dimostrare che ogni funzione continua $f : D \to \mathbb{R}$ è uniformemente continua. (suggerimento: adattare la dimostrazione fatta in [C-INTERVALLI] nel caso in cui $D = [a, b]$ è un intervallo chiuso e limitato).