

November 13, 2014

ANALISI I BM - 2014-15 - ESERCIZI, FOGLIO 7.

Esercizio 1. Sia $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ continua.

(a) E' vero che se $f(D)$ è un insieme aperto di \mathbb{R} , allora anche D è un insieme aperto?

(b) E' vero che se D è aperto e $A \subseteq \mathbb{R}$ è aperto, allora anche $f^{-1}(A)$ è aperto?

Esercizio 2. Sia $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ iniettiva e continua. Supponiamo che x_0 sia un punto isolato di D . E' vero che $f(x_0)$ è un punto isolato di $f(D)$?

Esercizio 3. Siano $A, B \subseteq \mathbb{R}$, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $g : B \rightarrow \mathbb{R}$ funzioni tali che $f(x) = g(x)$ per ogni $x \in A \cap B$. Sia $(f \cup g) : A \cup B \rightarrow \mathbb{R}$, definita da: $(f \cup g)(x) = f(x)$ se $x \in A \setminus B$, $(f \cup g)(x) = g(x)$ se $x \in B \setminus A$, $(f \cup g)(x) = g(x) = f(x)$ se $x \in A \cap B$. Supponiamo che f e g siano continue. E' vero che anche $(f \cup g)$ è continua? Stessa domanda supponendo in più che A e B siano insiemi chiusi.

Esercizio 4. Sia $f(x) = \sin(1/x)$ definita su $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Dimostrare che per ogni $b \in [-1, 1]$ esiste una successione $a : \mathbb{N} \rightarrow D$, tale che $f(a_n) \rightarrow b$.

Esercizio 5. Calcolare, se esiste, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{1/2} - 1}{(1+x)^{1/3} - 1}$.

Esercizio 6. Calcolare, se esiste, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(5x)}{x}$.

Esercizio 7. Calcolare, se esiste, $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x^2}{\sin(\pi x)}$.

Esercizio 8. Calcolare, se esiste, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)^x$.

Esercizio 9. Calcolare, se esiste, $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos(x))^{1/x^2}$.

Esercizio 10. Calcolare, se esiste, $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin(x) - \sin(a)}{x - a}$.