Analisi I - IngBM - 30 Giugno 2018
COMPITO A

COGNOME .... NOME ....

MATRICOLA .... VALUTAZIONE ..... + ... = ...

1. Istruzioni

Gli esercizi devono essere svolti negli appositi spazi del presente fascicolo; **solo questo sarà ritirato e valutato.** *I fogli a quadretti messi a disposizione possono essere usati liberamente ma in nessun caso saranno ritirati. Il compito è composto di due parti. La prima parte deve essere svolta preliminarmente. Essa verrà corretta per prima e valutata con un punteggio di $0 \leq x \leq 10$ punti. Condizione necessaria affinché venga preso in considerazione l'eventuale svolgimento della seconda parte è che $x \geq 6$. In tal caso la seconda parte viene valutata con un punteggio di $0 \leq y \leq 24$ punti. Il compito sarà sufficiente per l'ammissione alla prova orale se $x + y \geq 19$. In tal caso il voto di ammissione all'orale sarà $v = \min(28, x + y)$.*
Attenzione. Tutte le risposte devono essere giustificate

2. Prima parte

Esercizio 0 (punti 0). Leggere e capire le istruzioni.

Esercizio 1.(3 punti) Dire se esiste e, in caso affermativo, calcolare il limite

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{2n^n + 5^n}}{n}$$

giustificando il risultato ottenuto.
SOLUZIONE.

□ Il limite L non esiste perché

□ $L =$ perché

Esercizio 2.(3 punti)
Siano f, g due funzioni da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ con f periodica. Si chiede se le funzioni $f \circ g$ e $g \circ f$ sono funzioni periodiche
SOLUZIONE.

Esercizio 3.(4 punti) Dire se per le seguenti funzioni esistono i limiti per $x \to -\infty$ e per $x \to \infty$ e in caso positivo calcolarli.

$$f(x) = \sin\left(\frac{e^x}{e^x+1}\right) \qquad\qquad g(x) = \frac{e^{\sin x}}{e^{\sin x}+1}$$

SOLUZIONE.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) \begin{cases} \square \quad \text{NON ESISTE perché} \\ \\ \square \quad \text{ESISTE E VALE} \qquad \text{perché} \\ \\ \end{cases}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) \begin{cases} \square \quad \text{NON ESISTE perché} \\ \\ \square \quad \text{ESISTE E VALE} \qquad \text{perché} \\ \\ \end{cases}$$

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) \begin{cases} \square \quad \text{NON ESISTE perché} \\ \\ \square \quad \text{ESISTE E VALE} \qquad \text{perché} \\ \\ \end{cases}$$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) \begin{cases} \square \quad \text{NON ESISTE perché} \\ \\ \square \quad \text{ESISTE E VALE} \qquad \text{perché} \\ \\ \end{cases}$$

3. Seconda parte

Esercizio 1.(10 punti)
Si consideri la formula

$$f(x) = \begin{cases} \ln(1+e^x) & \text{se } x \leq 0 \\ \ln x & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

(1) Determinare il più grande sottoinsieme $D \subset \mathbb{R}$ tale che la formula definisca una funzione $f : D \to \mathbb{R}$
(2) Determinare il più grande sottoinsieme C di D tale che la restrizione di f su C sia continua.
(3) Determinare il più grande sottoinsieme aperto R di D tale che la restrizione di f su R sia derivabile
(4) Determinare i punti di D che siano di minimo assoluto o relativo di f.
(5) Determinare i punti di D che siano di massimo assoluto o relativo di f

SOLUZIONE

(1)

(2)

(3)

(4)

(5)

Esercizio 2.(6 punti)
Si consideri la formula

$$F(n) : \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} = \alpha - \frac{n+2}{2^n}$$

dove α è un numero naturale. Si verifichi che la formula è induttiva, nel senso che $F(n) \Rightarrow F(n+1)$ e si determini se esistono naturali α per cui la formula è vera per ogni $n \geq 1$.
SOLUZIONE

Esercizio 3.(4 punti) Dire se esistono, e in caso positivo quante sono, soluzioni complesse dell'equazione

$$e^z = e^2$$

nel quadrato del piano complesso centrato nell'origine di vertici i punti $\pm 7 \pm 7i$
SOLUZIONE

Esercizio 4.(4 punti)
Sia a un numero reale non nullo e p una funzione tale che la sua derivata quarta è identicamente nulla.
Esprimere in funzione di a e p una primitiva della funzione

$$f(t) = p(t)e^{at}.$$

SOLUZIONE