

Università di Pisa  
Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali  
Corso di Laurea in Matematica  
Anno Accademico 2000-01

Tesi di Laurea

## Sul teorema di uniformizzazione

CANDIDATO:  
Diego Conti

RELATORE:  
Riccardo Benedetti

CONTRORELATORE:  
Mario Salvetti

## Introduzione

Ogni superficie di Riemann  $M$  ammette un rivestimento universale  $\phi : \tilde{M} \rightarrow M$ , che a priori è solo uno spazio topologico di Hausdorff; d'altra parte le restrizioni dell'omeomorfismo locale  $\phi$  agli aperti in cui è invertibile possono essere viste come carte a valori in  $M$ , che danno a  $\tilde{M}$  una struttura di superficie di Riemann per cui  $\phi$  è olomorfa. Tra le superfici di Riemann semplicemente connesse, ci sono il disco  $D^2 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ , la sfera  $S^2 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ , il piano complesso  $\mathbb{C}$ . Il teorema di uniformizzazione afferma che a meno di isomorfismo non ce ne sono altre. Di conseguenza, ogni superficie di Riemann è il quoziente di una di queste tre per un gruppo che agisce in modo libero e propriamente discontinuo. Nelle carte sopra definite, gli elementi di un tale gruppo agiscono come l'identità, perciò sono automorfismi olomorfi; quindi il teorema di uniformizzazione permette di classificare le superfici di Riemann calcolando i gruppi di automorfismi olomorfi della sfera, del disco e del piano che agiscono in modo libero e propriamente discontinuo. Nel caso della sfera, sono il gruppo banale; nel caso del piano, sono i gruppi di applicazioni del tipo  $z \rightarrow az + b$ ; nel caso del disco sono sottogruppi del gruppo delle isometrie del disco iperbolico. In ognuno dei tre casi si tratta dunque di sottogruppi che agiscono in modo libero e propriamente discontinuo del gruppo di isometrie per la struttura riemanniana standard; quindi ogni superficie di Riemann ammette una struttura riemanniana completa di curvatura costante, compatibile con la sua struttura conforme. È chiaro poi che a una struttura riemanniana completa di curvatura costante su una superficie induce una struttura di superficie di Riemann compatibile. Questo fatto è molto significativo, perché identifica due categorie di superfici che a priori sono distinte; a posteriori questa distinzione cade, ma, finché il teorema di uniformizzazione resta nella forma indeterminata di cui sopra, tale distinzione si conserva come differenza dei metodi che si possono usare per studiare superfici con una struttura di questo tipo. Infatti quanto detto sopra dimostra che esiste una corrispondenza tra le due classi, ma non la esplicita; quindi i due punti di vista, benché equivalenti, non sono ancora indifferenti, perché sebbene in linea di principio tutto quello che si può dire da uno dei due punti di vista lo si possa dire anche dall'altro, non si dà un metodo universale per effettuare la "traduzione".

Questo spiega quale sarebbe l'utilità di una dimostrazione più determinata o "effettiva" del teorema di uniformizzazione, che costruisca in modo più esplicito il biolomorfismo cercato; la dimostrazione classica, che riportiamo nel capitolo 2, è poco soddisfacente da questo punto di vista perché fa un pesante uso del metodo di Perron e comunque si basa sull'analisi. Un possibile approccio per una dimostrazione più geometrica ed effettiva consiste nello spezzare il teorema in due: da un lato, si dimostra che ogni aperto di  $S^2$  semplicemente connesso è biolomorfo al disco, al piano o alla sfera; dall'altro, che ogni superficie di Riemann semplicemente connessa ammette un embedding in  $S^2$ . La prima parte, che va sotto il nome di teorema dell'applicazione di Riemann, viene trattata nel capitolo 1. Nel paragrafo 1.2, se ne dà una dimostrazione classica,

analitica e non costruttiva, ma segnatamente più semplice della dimostrazione del caso generale. Nel paragrafo 1.3 si propone una dimostrazione di Rodin e Sullivan, che ottiene la mappa di Riemann come limite di opportune mappe lineari a tratti, la cui esistenza dipende da un teorema di Andreev che afferma che ogni triangolazione di  $S^2$  può essere realizzata come triangolazione associata a un impilamento di cerchi. Thurston ha dato una dimostrazione non del tutto costruttiva di questo teorema per superfici con  $\chi \leq 0$ , e un algoritmo per costruire esplicitamente queste mappe, attraverso un metodo di approssimazioni successive. Usando metodi analoghi, in 1.4 dimostriamo il teorema di Andreev per la sfera, e inoltre che se i dati iniziali sono in un dato intorno alla soluzione, l'algoritmo converge alla soluzione. Inoltre, questi intorno viene determinato esplicitamente nel senso che si può dare un semplice algoritmo per determinare se un punto vi appartiene.

Successivamente si affronta la seconda metà del problema di cercare una dimostrazione geometrica ed effettiva del teorema di uniformizzazione, che consiste nel dimostrare il teorema di uniformizzazione a partire dal teorema dell'applicazione di Riemann. Nel capitolo 3 si propone una dimostrazione di Demailly del caso non compatto, assumendo che il teorema valga nel caso compatto, cosa che è stata dimostrata nel capitolo 2 in modo logicamente indipendente dalla dimostrazione del caso non compatto, ma comunque analitico e non costruttivo perché fa uso del teorema di esistenza della soluzione al problema di Dirichlet. La dimostrazione di Demailly ha carattere più "geometrico" perché l'unico risultato di analisi (oltre al teorema dell'applicazione di Riemann) che usa è il teorema di Montel.

Nel capitolo 4 si danno altre due dimostrazioni del teorema di uniformizzazione nel caso compatto; la prima, più classica, passa attraverso il teorema di Riemann-Roch, che segue a sua volta dall'esistenza di differenziali meromorfi con opportune singolarità. Questa dimostrazione, benché qualitativamente diversa, ha caratteristiche simili a quella del capitolo 2. La seconda invece, dovuta anch'essa a Demailly, sfrutta gli stessi metodi di quella fornita nel capitolo 3. In definitiva, si ha una dimostrazione del teorema in cui tutta l'analisi è concentrata nel teorema dell'applicazione di Riemann; quest'ultimo poi ammette una dimostrazione sostanzialmente costruttiva.

Tutte le dimostrazioni del teorema di uniformizzazione qui considerate non fanno uso della paracompattatezza della superficie  $M$ ; d'altra parte, la sfera, il disco e il piano hanno una base numerabile, e se  $\phi : \tilde{M} \rightarrow M$  è il rivestimento universale di  $M$ ,  $\phi$  manda una base numerabile di  $\tilde{M}$  in una base numerabile di  $M$ . Questo spiega perché nella definizione di superficie di Riemann non si fa cenno alla paracompattatezza.

Per quanto riguarda la storia del teorema di uniformizzazione, esso fu enunciato da Riemann nel 1851, con una dimostrazione incompleta in quanto basata sulla risolubilità del problema di Dirichlet, che a quei tempi veniva assunta come conseguenza del cosiddetto principio di Dirichlet (o di Thomson), il quale

fu confutato da Weierstrass nel 1870; in realtà che in generale il problema di Dirichlet si possa risolvere è vero solo per domini regolari (si veda il teorema 2.23), e fu dimostrato soltanto nel 1901, da Hilbert, il cui risultato fu tuttavia pubblicato nel 1909. Gli studi di Riemann avevano fatto risaltare l'importanza di questo problema, e contribuito a motivare lo sviluppo di strumenti analitici usando i quali nel 1907 Poincaré e Koebe, indipendentemente l'uno dall'altro, riuscirono a dare una dimostrazione completa del teorema di uniformizzazione, basandosi sull'esistenza di opportune funzioni armoniche con singolarità. Nel 1989 Demailly diede una dimostrazione geometrica del caso non compatto a partire dal caso compatto, intendendo quest'ultimo come conseguenza immediata del teorema di Riemann-Roch. Nel 1990, Marin dimostrò che anche il caso compatto si poteva dimostrare in modo puramente geometrico, a partire dal solo teorema dell'applicazione di Riemann.

# Capitolo 1

## Il teorema dell'applicazione di Riemann

In questo capitolo si dimostra il teorema dell'applicazione di Riemann in due modi diversi; il primo è "classico" e di tipo puramente esistenziale. Il secondo, dovuto a Thurston, si basa su un teorema di Andreev sugli impilamenti di cerchi e produce l'applicazione di Riemann come limite di certe applicazioni quasiconformi la cui descrizione qualitativa è piuttosto esplicita. Questa seconda dimostrazione si presta, in linea di principio, a raffinarsi in una versione realmente costruttiva del teorema. Questa necessiterebbe di una versione "effettiva" del teorema di Andreev. Nell'ultimo paragrafo del capitolo discutiamo alcuni passi in questa direzione e mettiamo in evidenza alcune difficoltà che restano da risolvere.

### 1.1 Preliminari

In questo paragrafo si danno alcune definizioni e alcuni risultati che costituiscono il presupposto di ciò che segue.

**Definizione 1.1.** *Uno spazio topologico connesso e di Hausdorff  $M$  si dice una superficie di Riemann se esiste un atlante  $\{U_\alpha, \psi_\alpha\}_{\alpha \in I}$  dove  $\psi_\alpha : U_\alpha \rightarrow V_\alpha \subset \mathbb{C}$  è un omeomorfismo di aperti,  $\bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha = M$  e le applicazioni*

$$\psi_\alpha \circ \psi_\beta^{-1} : \psi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \psi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$$

*sono oloedomorfe per  $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ . L'applicazione  $\psi_\alpha$  si dice una carta, l'inversa  $\psi_\alpha^{-1}$  si dice parametrizzazione. Due atlanti si dicono compatibili se la loro unione è un atlante; una struttura di superficie di Riemann per  $M$  è una classe di equivalenza di atlanti per la relazione di essere compatibili.*

Poiché l'unione di atlanti compatibili è un atlante ad essi compatibili, ogni struttura di superficie di Riemann ammette un atlante massimale. Nel seguito si supporrà che  $M$  sia una superficie di Riemann su cui è fissato l'atlante massimale.

Un aperto di una superficie di Riemann è una superficie di Riemann se e solo se è connesso.

**Definizione 1.2.** *Un aperto  $K \subset M$  si dice un disco conforme se esiste una parametrizzazione  $\phi : D^2 \rightarrow K$  che si estende a una parametrizzazione per un intorno di  $\bar{K}$ .*

Dato un disco conforme  $K$ , si può sempre supporre che la parametrizzazione  $\phi$  della definizione sia definita su un disco di raggio  $> 1$ .

Quando si sarà dimostrato il teorema di uniformizzazione, si vedrà che ogni superficie di Riemann è a base numerabile (teorema 2.44), e dunque paracompatta. Per adesso, ci si può limitare ad osservare che la parte della teoria delle varietà differenziabili che non fa uso della paracompattatezza è ancora valida per le superfici di Riemann come qui definite. In particolare si definiscono il fibrato tangente reale  $TM$  e le  $p$ -forme differenziali in modo usuale; queste saranno indicate con  $A^p(M)$ , e verranno supposte  $\mathbb{R}$ -lineari a valori in  $\mathbb{C}$ , di regolarità  $C^\infty$  dove non diversamente specificato. In particolare, una 1-forma sarà un'applicazione da  $TM$  in  $\mathbb{C}$ . Per  $\phi : M \rightarrow N$  (in particolare per  $\phi$  parametrizzazione) si indicherà con  $\phi^*$  il pullback delle forme e delle funzioni su  $N$ .

Su una superficie di Riemann  $M$  è definito un automorfismo di fibrati vettoriali  $J : TM \rightarrow TM$  dato dalla moltiplicazione per l'unità immaginaria  $i$ .  $J$  induce un automorfismo  $*$  :  $A^1(M) \rightarrow A^1(M)$  dato da  $*\omega = \omega \circ -J$ , che commuta con il pullback, e mediante una parametrizzazione  $\phi_\alpha$  induce l'automorfismo di  $A^1(U_\alpha)$  dato da  $*dx = dy$ ,  $*dy = -dx$ . In coordinate locali,

$$*dz = dz \circ -J = -idz, *d\bar{z} = id\bar{z}$$

perché  $dz$  è  $\mathbb{C}$ -lineare e  $d\bar{z}$  è antilineare.

**Definizione 1.3.** *Se  $u \in \mathcal{C}^2(M, \mathbb{C})$ , si definisce laplaciano di  $u$  la 2-forma  $\Delta u = d^*df$ . Si dirà che  $u$  è armonica se è reale e  $\Delta u = 0$ .*

In coordinate locali,

$$\phi^* \Delta u = d^*d\phi^*u = \left( \frac{\partial^2 \phi^*u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi^*u}{\partial y^2} \right) dx \wedge dy$$

oppure

$$\phi^* \Delta u = -di \frac{\partial \phi^*u}{\partial z} dz + di \frac{\partial \phi^*u}{\partial \bar{z}} d\bar{z} = -2i \frac{\partial^2 \phi^*u}{\partial z \partial \bar{z}} dz \wedge d\bar{z} = 4 \frac{\partial^2 \phi^*u}{\partial z \partial \bar{z}} dx \wedge dy$$

**Definizione 1.4.** *Una funzione derivabile  $f : M \rightarrow N$  si dice olomorfa se il suo differenziale è  $\mathbb{C}$ -lineare, ossia  $df \circ J = J \circ df$ .*

Se  $N = \mathbb{C}$ , in una parametrizzazione  $\phi$  risulta che  $\phi^* f$  soddisfa le equazioni di Cauchy-Riemann, per cui è olomorfa in senso usuale.

**Lemma 1.5.** *Se  $f : M \rightarrow \mathbb{C}$  è una funzione olomorfa tale che  $\operatorname{Re} f$  o  $|f|$  è costante, allora  $f$  è costante su ogni componente connessa.*

*Dimostrazione.* In una carta  $(U, \phi^{-1})$ , vale nella prima ipotesi:

$$0 = \phi^* d(f + \bar{f}) = \frac{\partial \phi^* f}{\partial z} dz + \frac{\partial \phi^* \bar{f}}{\partial \bar{z}} d\bar{z}$$

e nella seconda:

$$0 = \phi^* d(f\bar{f}) = \phi^*(f d\bar{f}) + \phi^*(\bar{f} df) = \frac{\partial \phi^* \bar{f}}{\partial \bar{z}} f d\bar{z} + \frac{\partial \phi^* f}{\partial z} \bar{f} dz$$

da cui si conclude per l'indipendenza di  $dz$  e  $d\bar{z}$  (nel secondo caso, occorre anche osservare che se  $f$  non è identicamente nulla su  $U$  il luogo di zeri di  $\bar{f}$  è raro e quindi  $\frac{\partial \phi^* f}{\partial z}$  è costante su  $\phi(U)$  per continuità).  $\square$

**Lemma 1.6.** *Se  $M$  è semplicemente connessa,  $u : M \rightarrow \mathbb{R}$  è una funzione armonica,  $x \in M$ , allora esistono due funzioni olomorfe,  $f, g : M \rightarrow \mathbb{C}$ , tali che  $u = \operatorname{Re} f = \log |g|$ . Per  $M$  qualunque, una tale  $f$  se esiste è univocamente determinata a meno di costante additiva puramente immaginaria, mentre  $g$  se esiste è determinata a meno di costante moltiplicativa di modulo 1.*

*Dimostrazione.*  $d(du + i^* du) = d^2 u + i \Delta u = 0$ , per cui esiste  $f : M \rightarrow \mathbb{C}$  tale che  $du + i^* du = df$ ,  $u(x) = f(x)$ . Allora se  $(y; v) \in TM$ , vale:

$$df(y; v) = du(y; v) + idu(y; -iv)$$

per cui

$$df(y; iv) = du(y; iv) + idu(y; v) = idf(y; v)$$

vale a dire che  $f$  è olomorfa; inoltre  $d(\operatorname{Re} f) = du$ , per cui  $u = \operatorname{Re} f$ . Posto  $g = e^f$ ,  $g$  è olomorfa, e  $\log |g| = \log e^u = u$ . Per quanto riguarda l'unicità, siano  $(f, g)$  e  $(f', g')$  come nell'enunciato: allora vale

$$\operatorname{Re}(f - f') = 0 = \log |g| - \log |g'| = \log \left| \frac{g}{g'} \right|,$$

da cui per il lemma 1.5  $f = f' + k$ ,  $g = \chi g'$ , con  $\operatorname{Re} k = 0$ ,  $|\chi| = 1$ .  $\square$

**Corollario 1.7.** *Siano  $M$  una superficie di Riemann semplicemente connessa,  $f : M \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$  olomorfa. Allora esiste  $g : M \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$  olomorfa tale che  $g^2 = f$ . Inoltre se  $f$  è iniettiva anche  $g$  lo è.*

*Dimostrazione.* La funzione  $\frac{1}{2} \log |f(z)|$  è armonica e quindi esiste  $g_0$  tale che  $\log |g_0(z)| = \frac{1}{2} \log |f(z)|$ , per cui  $\log |g_0(z)^2| = \log |f(z)|$ , da cui  $f(z) = e^{i\theta} g_0(z)^2$ , per cui  $g = e^{i\theta/2} g_0$  è la funzione cercata. Se poi  $f$  è iniettiva, vale

$$g(z) = g(w) \implies f(z) = g^2(z) = g^2(w) = f(w) \implies z = w. \quad \square$$

**Corollario 1.8.** Per  $u : D^2 \rightarrow \mathbb{R}$  armonica, vale

$$u(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(e^{i\theta}) d\theta \quad (1.1)$$

*Dimostrazione.* Si scrive  $u = \operatorname{Re} f$  e si usa l'analogia formula per le funzioni olomorfe.  $\square$

**Definizione 1.9.** Si dice che una funzione continua  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  soddisfa il principio del massimo (o del minimo) se in ogni  $D \subset M$  aperto connesso,  $f|_D$  non ha un massimo (rispettivamente, un minimo) a meno che sia costante.

Se una funzione soddisfa localmente il principio del massimo, la controimmagine del valore massimo è aperta e chiusa; poichè nella definizione si considerano domini connessi, la proprietà di soddisfare il principio del massimo è locale.

**Proposizione 1.10.** Se  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  soddisfa il principio del massimo, allora per ogni compatto  $K \subset M$  esiste  $x \in \partial K$  tale che  $\max f|_K = f(x)$ .

**Proposizione 1.11.** Una funzione che soddisfa 1.1 soddisfa il principio del massimo e quello del minimo.

## 1.2 Una dimostrazione

Per il momento, ci si limiterà a dimostrare il teorema di uniformizzazione per varietà che ammettano una funzione meromorfa iniettiva. Una tale funzione può essere vista come una  $\phi : M \rightarrow S^2$  olomorfa che ha ovunque grado 1, per cui è un embedding. Inoltre, una funzione olomorfa è aperta, per cui  $M$  è biolomorfo a un aperto di  $S^2$ . In questo caso, è chiaro che  $M$  è a base numerabile.

**Teorema 1.12 (Teorema dell'applicazione di Riemann).** Sia  $D$  un aperto semplicemente connesso di  $S^2$ . Allora se  $S \setminus D$  contiene più di un punto  $D$  è biolomorfo al disco.

Innanzitutto ci si riduce al caso in cui  $0 \in D \subset D^2$ :

**Proposizione 1.13.** Se  $D \subset S^2$  è un aperto non vuoto, e  $S^2 \setminus D$  contiene almeno due punti, allora esiste  $f : D \rightarrow D^2$  olomorfa iniettiva, con  $0 \in f(D)$ .

*Dimostrazione.* Identificando  $S^2$  a  $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ , si può supporre che  $D \subset \mathbb{C}$ . Se poi  $\mathbb{C} \setminus D$  contiene una palla aperta  $B(x, \rho)$ , l'applicazione olomorfa iniettiva  $z \rightarrow \frac{\rho}{z-x}$  dà un'immersione in  $D^2$ ; componendo con un'opportuna omografia, si può supporre che 0 sia nell'immagine. In generale, se  $x \notin D$ , per il corollario 1.7, esiste una funzione olomorfa iniettiva  $g : D \rightarrow \mathbb{C}$  tale che  $g^2(z) = z - x$ . D'altra parte  $g(D) \cap -g(D) = \emptyset$ , perché

$$g(z) = -g(w) \implies z - x = w - x \implies z = w \implies g(z) = -g(z) \implies g(z) = 0$$

che è assurdo. Poichè  $g$  è olomorfa,  $-g(D)$  è aperto e ci si riconduce al caso precedente.  $\square$

L'isomorfismo cercato verrà ottenuto massimizzando il funzionale  $f \rightarrow f'(0)$  in un'opportuna classe di funzioni di  $D$  in sé. Per poter dedurre l'esistenza del massimo occorrono due risultati, qui riportati come corollario 1.18 e lemma 1.24.

**Proposizione 1.14.** *Per  $M$  superficie di Riemann a base numerabile, sia  $\mathcal{C}(M, \mathbb{C})$  lo spazio delle funzioni continue da  $M$  in  $\mathbb{C}$ . Le seminorme  $\{P_K\}_{K \in E}$ , dove  $P_K(f) = \sup_K |f|$  inducono su di esso una struttura di spazio di Fréchet, e quindi di spazio metrico. Sia  $\mathcal{H}(M) \subset \mathcal{C}(M, \mathbb{C})$  lo spazio delle funzioni olomorfe da  $M$  in  $\mathbb{C}$ : esso è uno spazio di Fréchet con la struttura indotta.*

*Dimostrazione.* E' ovvio che  $P_K(f) = 0 \forall K$  implica  $f = 0$ . Per  $M$  compatto,  $\mathcal{C}(M, \mathbb{C})$  è completo perché  $\mathbb{C}$  è completo;  $\mathcal{H}(M)$  è un sottospazio chiuso perchè il limite uniforme di funzioni analitiche è analitico. In generale,  $M$  è a base numerabile e localmente compatto, per cui il ricoprimento dato dai sottoinsiemi compatti di  $M$  ammette un sottoricoprimento numerabile. Poiché di conseguenza la topologia di  $\mathcal{C}(M, \mathbb{C})$  può essere definita da una quantità numerabile di seminorme,  $\mathcal{C}(M, \mathbb{C})$  risulta essere uno spazio metrico, per cui basta verificare che ogni successione di Cauchy  $\{f_n\}$  in  $\mathcal{C}(M, \mathbb{C})$  è convergente. Infatti una tale successione converge puntualmente a una qualche funzione  $f$ ; essendo di Cauchy in  $\mathcal{C}(K, \mathbb{C}) \forall K \subset M$  compatto, converge a  $f$  in ogni  $\mathcal{C}(K, \mathbb{C})$ , per cui  $f_n \rightarrow f$  in  $\mathcal{C}(M, \mathbb{C})$ . Inoltre  $\mathcal{H}(M)$  è chiuso in  $\mathcal{C}(M, \mathbb{C})$  perché l'analicità è una proprietà locale.  $\square$

**Proposizione 1.15.** *Se  $D \subset \mathbb{C}$ , l'operatore lineare  $\frac{\partial}{\partial z} : \mathcal{H}(D) \rightarrow \mathcal{H}(D)$  è continuo.*

*Dimostrazione.* Sia  $K \subset D$  compatto,  $K'$  un suo intorno compatto,  $M = P_{K'}(f)$ . Se  $z \in K$ ,  $\rho = d(D \setminus K', K)$  la disuguaglianza di Cauchy dà  $|f'(z)| \leq M/\rho$ , quindi

$$\lim_{f \rightarrow 0} \frac{\partial f}{\partial z} = 0 \quad \square$$

**Definizione 1.16.** *Si dice che un insieme  $\mathcal{F} \subset \mathcal{C}(M)$  è equicontinuo se  $\forall x_0 \in M, \epsilon > 0 \exists U \ni x_0$  aperto tale che  $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$  per ogni  $f \in \mathcal{F}, x \in U$ . Si dice che  $\mathcal{F}$  è equilimitato se*

$$\sup_{f \in \mathcal{F}, x \in M} |f(x)| < +\infty$$

Vale il seguente

**Teorema 1.17 (Ascoli-Arzelà).** *Sia  $X$  spazio metrico compatto e  $Y$  uno spazio metrico completo; allora un sottoinsieme di  $\mathcal{C}(X, Y)$  è relativamente compatto se e solo se è equicontinuo ed equilimitato.*

**Corollario 1.18.** *Un insieme  $\mathcal{F} \subset \mathcal{H}(M)$  è relativamente compatto se e solo se  $\forall K \subset M$  compatto,  $\{f|_K \mid f \in \mathcal{F}\}$  è equilimitato.*

*Dimostrazione.* Basta vedere che se  $\mathcal{F}$  è equilimitato sui compatti, allora è relativamente compatto in  $\mathcal{C}(M, \mathbb{C})$ . Si verifica dapprima che è equicontinuo. Fissati  $x_0$  ed  $\epsilon$ , sia  $\phi : (D^2, 0) \rightarrow (K, x_0)$  un disco conforme,  $f \in \mathcal{F}$ . Per la proposizione 1.15, essendo  $\phi^* f$  limitata su  $\overline{D^2}$ , anche  $(\phi^* f)'$  è qui limitata da qualche costante  $C$ . Vale allora:

$$\forall y \in B\left(0, \frac{\epsilon}{C}\right) = \left\{y \mid |y| < \frac{\epsilon}{C}\right\}, |f(\phi(y)) - f(x_0)| = |(\phi^* f)'(\zeta)| |y| \leq \epsilon$$

essendo  $\zeta \in D^2$ , per cui  $\phi(B(0, \epsilon/C))$  è l'intorno cercato di  $x_0$ .

Sia ora  $\{f_n\}$  una successione in  $\mathcal{F}$ , e sia  $H = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} K_k$ , con i  $K_k$  compatti,  $K_k \subset K_{k+1}$ . Per il teorema, si possono estrarre sottosuccessioni  $\{f_n^k\}$  di  $\{f_n\}$  in modo che  $\{f_n^k\}$  converga in  $\mathcal{H}(K_k)$ . Se si pone  $g_n = f_n^k$ , si ottiene una sottosuccessione che converge in  $\mathcal{H}(K_k)$  per ogni  $k$ .  $\square$

Se  $\omega \in A^1(M)$  è una forma chiusa e  $\gamma$  è un cammino  $\mathcal{C}^\infty$  in  $M$ , l'integrale

$$\int_\gamma \omega$$

dipende solo dalla classe di omotopia di  $\gamma$ . Poiché  $\pi_1(M)$  è generato dai cammini  $\mathcal{C}^\infty$ , in questo modo si può definire l'integrale lungo cammini solo continui, e di conseguenza sulle 1-catene.

**Teorema 1.19.** *Se  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  è olomorfa su un aperto di  $D$ , e  $\gamma$  una 1-catena tale che  $0 = [\gamma] \in H_1(D)$  (in particolare se  $\gamma$  è una curva di Jordan con parte interna contenuto in  $D$ ), allora  $\int_\gamma f dz = 0$ .*

*Dimostrazione.* Essendo  $d(f dz) = 0$ ,  $\gamma \rightarrow \int_\gamma f dz$  è un omomorfismo di  $\pi_1(D)$  nel gruppo abeliano  $\mathbb{C}$ , per cui passa al quoziente.  $\square$

**Definizione 1.20.** *Sia  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  meromorfa, olomorfa in  $B(x, \rho) \setminus \{x\}$ . Si pone*

$$\text{Res}_x f = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(x, \rho)} f dz .$$

Scrivendo la serie di Laurent in  $B(x, \rho)$ :

$$f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n (z - x)^n$$

e integrando termine a termine, si vede che

$$\text{Res}_x f = a_{-1} \tag{1.2}$$

**Definizione 1.21.** Data  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  meromorfa,  $x \in D$ , si dice che  $\text{ord}_x f = n$  se è  $f(z) = (z-x)^n h(z)$  in  $B(x, \rho) \subset D$ , con  $h$  olomorfa diversa da 0. Si dice che  $\text{ord}_x f = -n$  se  $\text{ord}_x \frac{1}{f} = n$ .

Sia  $\text{ord}_x f = n > 0$ ; in tal caso derivando si ottiene  $\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{n}{z-x} + \frac{h'(z)}{h(z)}$ . Poiché  $h'/h$  è olomorfa, si ha che  $\text{Res}_x f'/f = n = \text{ord}_x f$ . In generale, per  $f \in \mathcal{H}(M)$ ,  $\phi$  parametrizzazione, si pone  $\text{ord}_{\phi(x)} f = \text{ord}_x \phi^* f$ , e si verifica che non dipende da  $\phi$ .

**Teorema 1.22.** Se  $D \subset \mathbb{C}$  è una sottovarietà a bordo compatta,  $f$  è meromorfa in  $D$  con un numero finito di zeri e di singolarità, allora

$$\int_{\partial D} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 2\pi i \sum_{x \in D} \text{ord}_x f$$

*Dimostrazione.* Siano  $x_i, i = 1, \dots, m$  le singolarità e gli zeri di  $f$ , e  $C_i \subset \overset{\circ}{D}$ ,  $i = 1, \dots, m$  dischi intorno ad essi. Allora

$$\int_{\partial D} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \int_{\partial(D \setminus \bigcup_{i=1}^m C_i)} \frac{f'(z)}{f(z)} dz + \sum_{i=1}^m \int_{\partial C_i} \frac{f'(z)}{f(z)} dz$$

Il primo termine è 0 perché  $D \setminus \bigcup_{i=1}^m C_i$  è triangolabile e per il teorema 1.19; il secondo è

$$\sum_{i=1}^m 2\pi i \text{ord}_{x_i} f = 2\pi i \sum_{x \in D} \text{ord}_x f \quad \square$$

**Teorema 1.23 (Rouché).** Sia  $D$  una sottovarietà a bordo compatta di  $\mathbb{C}$  con bordo connesso, parametrizzato da  $\gamma \in \mathcal{C}([0, 1], \partial D)$ . Se  $f$  e  $g$  sono funzioni meromorfe su  $D$  con un numero finito di zeri e poli, e

$$|f(z) - g(z)| < |f(z)| + |g(z)| \quad (1.3)$$

su  $\partial D$ , allora  $\sum_{z \in D} \text{ord}_z f = \sum_{z \in D} \text{ord}_z g$

*Dimostrazione.* Per ipotesi,  $f$  e  $g$  non si annullano su  $\partial D$ . Sia  $F = f/g$ ; allora  $F(\partial D) \cap (\mathbb{R}^- \cup \{0\}) = \emptyset$ , perché se per qualche  $z \in \partial D$  fosse  $|F(z)| = -F(z)$  allora dall'equazione 1.3 si avrebbe

$$|(F(z) - 1)| |g(z)| < |F(z)| |g(z)| + |g(z)| \implies 1 - F(z) < 1 - F(z)$$

che è assurdo. Quindi  $F \circ \gamma$  assume valori in un dominio semplicemente connesso su cui  $\frac{1}{z}$  è olomorfa, per cui (teorema 1.19)

$$0 = \int_{F \circ \gamma} \frac{dz}{z} = \int_{\gamma} F^* \frac{dz}{z} = \int_{\gamma} \frac{F'(z)}{F(z)} dz = \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz - \int_{\gamma} \frac{g'(z)}{g(z)} dz$$

dunque la tesi segue dal teorema 1.22.  $\square$

**Lemma 1.24.** *Se  $D$  è un aperto connesso di  $\mathbb{C}$  e  $\{f_n\}$  è una successione convergente in  $\mathcal{H}(D)$  con  $f_n$  iniettiva  $\forall n$ , allora  $f = \lim f_n$  è iniettiva o costante.*

*Dimostrazione.* Per assurdo, sia  $f(z) = f(w)$ ,  $z \neq w$ ,  $f$  non costante. Allora in  $D$  esistono due dischi chiusi disgiunti  $B_1, B_2$  intorno a  $z$  e  $w$  rispettivamente, in cui  $f - f(z)$  ha un unico zero. Sia

$$m = \min\{|f(x) - f(z)| \mid x \in \partial B_1\}$$

allora  $m > 0$ , quindi per  $n \gg 1$  si ha  $|f - f_n| < m$  su  $\partial B_1$ . Allora

$$|(f - f(z)) - (f_n - f(z))| < m \leq |f - f(z)|$$

su  $\partial B_1$ , quindi per il teorema 1.23  $f_n = f(z)$  in un punto di  $B_1$ . Analogamente si dimostra che per  $n \gg 1$   $f_n = f(z)$  in qualche punto di  $B_2$ , e questo contraddice l'iniettività delle  $f_n$ .  $\square$

Dimostrazione del teorema 1.12: L'insieme  $\mathcal{F} = \{f : D \rightarrow D^2 \mid f \text{ olomorfa, } |f'(0)| \geq 1, f \text{ iniettiva, } f(0) = 0\}$  è chiuso (lemma 1.24) ed equilimitato, per cui è compatto. Di conseguenza, il funzionale continuo (proposizione 1.15)  $f \rightarrow |f'(0)|$  raggiunge il massimo su qualche  $f \in \mathcal{F}$ . Per assurdo, sia  $a \in D^2 \setminus f(D)$ . Sia

$$\Phi_a(z) = \frac{z - \alpha}{1 - \overline{\alpha}z}, z \in D^2 \tag{1.4}$$

Allora, essendo  $\pi_1(D) = 0$  si può costruire un logaritmo  $h$  della funzione  $\Phi_a \circ f$ . Poiché  $|\Phi_a \circ f| < 1 \implies \operatorname{Re} h < 0$ , e  $-\overline{h(0)}$  è il simmetrico di  $h(0)$  rispetto all'asse  $y$ , si può definire una funzione  $g : D \rightarrow D^2$  ponendo

$$g = \frac{h - h(0)}{h + \overline{h(0)}}$$

allora  $g$  è olomorfa e  $g(0) = 0$ . D'altra parte

$$\frac{\partial g}{\partial z}(0) = \frac{1}{h(0) + \overline{h(0)}} \frac{\partial h}{\partial z}(0) = \frac{1 - |a|^2}{a(2\operatorname{Re} h(0))} \frac{\partial f}{\partial z}(0) = \frac{1 - |a|^2}{2a \log |a|} \frac{\partial f}{\partial z}(0)$$

e poiché la funzione  $\mathbb{R} \ni t \rightarrow 1 - t^2 + 2t \log t$  ha derivata  $2(\log t - t + 1) < 0$  e si annulla in 1, si ottiene  $\left| \frac{\partial g}{\partial z}(0) \right| > \left| \frac{\partial f}{\partial z}(0) \right|$  che è assurdo.  $\square$

### 1.3 Una dimostrazione alternativa

In questo paragrafo si descrive un'altra dimostrazione del teorema dell'applicazione di Riemann, descritta in [8] e attribuita a Thurston, che individua il biolomorfismo cercato come limite di mappe  $K$ -quasiconformi con  $K$  che tende a 1. Per costruire queste mappe si passa attraverso il teorema di Andreev, che nella sua formulazione originale dà l'esistenza ma non è costruttivo.

Grazie alla proposizione 1.13, la cui dimostrazione però non è costruttiva, ci si può ridurre al caso di aperti di  $\mathbb{C}$  connessi, semplicemente connessi e limitati.

### 1.3.1 Definizioni e preliminari

**Definizione 1.25.** Un impilamento di cerchi (circle packing) in  $S^2$  è un insieme  $\mathcal{I} = \{C_i \mid i \in I\}$  di cerchi  $C_i = \{z \in S^2 \mid |z - x_i| \leq r_i\}$  che hanno parte interna disgiunta. Il nervo di  $\mathcal{I}$  è lo 1-complesso i cui vertici sono i centri dei cerchi e i cui lati sono i segmenti geodetici che congiungono cerchi tangenti. Un impilamento (di cerchi) di  $S^2$  è un impilamento il cui nervo è lo 1-scheletro di una triangolazione di  $S^2$ .

Quindi un impilamento nella sfera è un impilamento della sfera se e solo se il complementare dell'unione dei cerchi è unione disgiunta di triangoli curvilinei. Nell'identificazione della sfera con il piano esteso, i cerchi che non contengono  $\infty$  corrispondono a cerchi.

**Definizione 1.26.** Dato un impilamento in  $S^2$ , si dice che un suo cerchio è il cerchio all'infinito se  $\infty$  è nella sua parte interna; tale cerchio verrà indicato con  $C_\infty$ . Un impilamento di cerchi in  $\mathbb{C}$  è un impilamento di cerchi in  $S^2$ , in cui  $\infty$  non appartiene a nessun cerchio. Per un cerchio  $C = B(z, r) \subset \mathbb{C}$ , si pone  $z(C) = z$ ,  $r(C) = r$ . Il nervo euclideo di  $\mathcal{I}$  impilamento in  $\mathbb{C}$  è lo 1-complesso i cui vertici sono i centri dei cerchi e i lati sono segmenti euclidei che congiungono cerchi tangenti; se coincide con lo 1-scheletro di una triangolazione di  $R \subset \mathbb{C}$ , si dice che questa è la triangolazione euclidea associata ad  $\mathcal{I}$ , e  $R$  è il supporto di  $\mathcal{I}$ .

Dunque il supporto è definito solo per impilamenti in  $\mathbb{C}$  di un dato tipo; tuttavia, gli impilamenti che si considereranno nel seguito sono tutti di questo tipo.

In generale, se  $\mathcal{I}$  è un impilamento in  $S^2 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  con un cerchio all'infinito,  $\mathcal{I} \setminus \{C_\infty\}$  è un impilamento in  $\mathbb{C}$ ; se  $\mathcal{I}$  è un impilamento di  $S^2$ ,  $\mathcal{I} \setminus \{C_\infty\}$  ha supporto  $R \subset S^2 \setminus C_\infty$ . In particolare, si dà la seguente

**Definizione 1.27.** Un impilamento di cerchi in  $\mathbb{C}$  è un impilamento di  $D^2$  se aggiungendo il cerchio all'infinito  $(\mathbb{C} \cup \{\infty\}) \setminus D^2$  se ne ottiene un impilamento di  $S^2$ . Un cerchio dell'impilamento è di bordo se è tangente al cerchio all'infinito.

**Proposizione 1.28.** La triangolazione associata al nervo di un impilamento in  $\mathbb{C}$  con supporto  $R$ , toglie eventualmente il triangolo che contiene  $\infty$ , è isomorfa alla triangolazione euclidea, mediante un isomorfismo che preserva l'orientazione.

*Dimostrazione.* La proiezione stereografica manda cerchi tangenti in cerchi tangenti; i triangoli geodetici sono omeomorfi ai corrispondenti triangoli euclidei, e gli omeomorfismi di triangoli adiacenti coincidono sul lato comune.  $\square$

**Definizione 1.29.** Due impilamenti di cerchi in  $S^2$  sono equivalenti se hanno triangolazioni associate isomorfe, mediante un isomorfismo che preserva l'orientazione.

Per la proposizione, due impilamenti in  $\mathbb{C}$  sono equivalenti se e solo se hanno triangolazioni euclidee isomorfe mediante un isomorfismo che preserva l'orientazione. Vale banalmente:

**Proposizione 1.30.** *Se due impilamenti in  $S^2$  hanno supporto  $R$ ,  $R'$  e sono equivalenti, esiste un omeomorfismo  $\phi : R \rightarrow R'$  che induce per restrizione un isomorfismo dei nervi euclidei.*

Vale poi il

**Teorema 1.31 (Teorema di Andreev).** *Ogni triangolazione di  $S^2$  è isomorfa alla triangolazione di qualche impilamento di  $S^2$ , dove l'isomorfismo è indotto da un omeomorfismo di  $S^2$  che mantiene l'orientazione. Tale impilamento è unico a meno di omografie.*

**Definizione 1.32.** *Dato  $\mathcal{I}$  impilamento di cerchi in  $S^2$ , si dice catena di lunghezza  $n$  una sequenza  $C_1, \dots, C_n$  in  $\mathcal{I}$ , senza ripetizioni, tale che  $|i - j| = 1$  implica  $C_i$  tangente a  $C_j$ ; si identificherà talvolta una catena all'insieme dei cerchi di cui è composta. La distanza di due cerchi è la minima lunghezza di una catena che li congiunge meno 1. Il fiore di un cerchio  $C \in \mathcal{I}$  è l'unione dei cerchi in  $\mathcal{I}$  che ne distano meno di 2 e degli interstizi tra di essi.*

La distanza così definita rende  $\mathcal{I}$  uno spazio metrico, e vi induce la topologia discreta.

**Definizione 1.33.** *Un ciclo è una catena tale che  $C_1$  e  $C_n$  sono tangenti. A ogni ciclo si associa la spezzata che congiunge con segmenti geodetici i centri di cerchi consecutivi (dove  $C_1$  e  $C_n$  sono considerati consecutivi). Si dice che un ciclo separa due cerchi se i cerchi non appartengono al ciclo e la spezzata del ciclo li separa in  $S^2$ . Se l'impilamento ha un cerchio all'infinito, si definisce spezzata euclidea del ciclo la spezzata euclidea ottenuta sostituendo con segmenti euclidei (che abbiano gli stessi estremi) i segmenti geodetici nella parte di spezzata contenuta nel complementare di  $C_\infty$ . La lunghezza geometrica di un ciclo in  $S^2$  è la lunghezza della spezzata euclidea del ciclo, cioè due volte la somma dei raggi dei suoi cerchi in  $\mathbb{C}$ .*

Per un impilamento di  $S^2$ , le palle nella metrica dell'impilamento sono i cerchi interni a qualche ciclo.

Si consideri un ricoprimento di  $\mathbb{C}$  dato da esagoni regolari congruenti uno dei quali ha centro nell'origine, e tale che due suoi esagoni si intersecano solo se hanno un lato in comune. I cerchi inscritti formano un impilamento in  $S^2$  di supporto  $\mathbb{C}$ , che se  $\epsilon$  è il raggio euclideo dei cerchi, è detto impilamento di cerchi esagonale regolare di raggio  $\epsilon$ , e verrà indicato con  $H_\epsilon$ .

**Teorema 1.34.** *Ogni impilamento in  $\mathbb{C}$  che ha supporto semplicemente connesso ed è equivalente a  $H_\epsilon$  si ottiene da esso mediante una mappa affine conforme.*

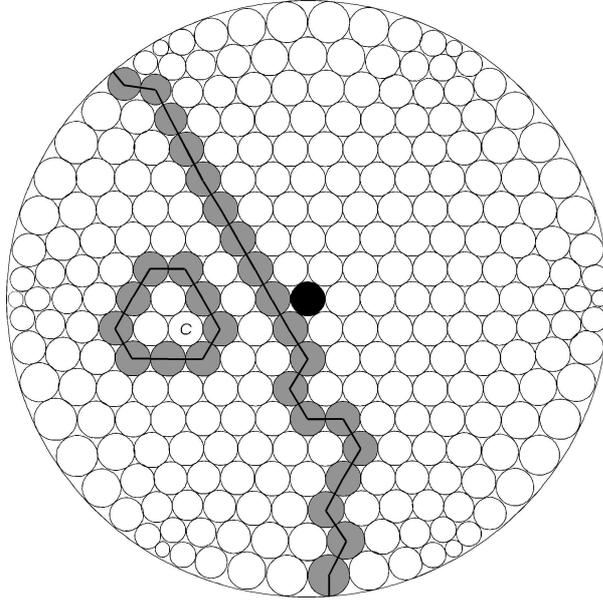


Figura 1.1: Due cicli in un impilamento di  $D^2$ , e le spezzate euclidee associate.

Per una traccia di dimostrazione, si rimanda a [8]

L'algoritmo di Thurston consiste nel costruire un impilamento di cerchi il cui supporto approssima  $D$  dall'interno, e costruire un impilamento del disco equivalente ad esso, la cui esistenza è garantita dal teorema 1.31; la corrispondenza tra cerchi, al tendere a zero del loro raggio, converge a un biolomorfismo di  $D$  col disco.

### 1.3.2 Definizione della mappa approssimata

Sia  $D \subset \mathbb{C}$  aperto limitato, connesso e semplicemente connesso, e  $D \ni 0$ ; in questo paragrafo si costruisce un impilamento di cerchi da cui si può ottenere una triangolazione di  $S^2$  e che ha supporto arbitrariamente vicino a  $D$ ; applicando il teorema di Andreev, si ottiene la mappa lineare a tratti che approssima il biolomorfismo di  $D$  e  $D^2$  cercato.

Sia  $\epsilon < d(0, \mathbb{C} \setminus D)/3$ , e  $C_0 \in H_\epsilon$  il cerchio che ha centro in  $0$ ; per la scelta di  $\epsilon$ , il fiore di  $C_0$  è contenuto in  $D$ . Sia  $U_\epsilon$  l'impilamento dei cerchi "interni a  $D$ ", nel senso che  $C \in U_\epsilon$  se e solo se esiste una catena  $C_0, \dots, C$  di cerchi di  $H_\epsilon$  il cui fiore è in  $D$ . Sia  $B_\epsilon$  l'impilamento dei cerchi "di bordo"<sup>1</sup> formato cioè

<sup>1</sup>Così detti perchè corrispondono a cerchi di bordo, secondo la definizione 1.27, nell'impilamento equivalente di  $D^2$  che si costruirà.

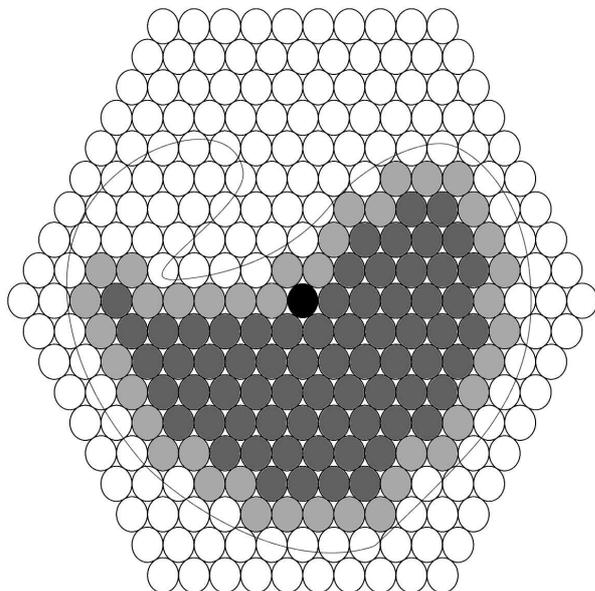


Figura 1.2: Costruzione di  $\mathcal{I}_\epsilon$ .

dai cerchi di  $H_\epsilon \setminus U_\epsilon$  che sono tangenti a qualche cerchio di  $U_\epsilon$ . Sia infine  $\mathcal{I}_\epsilon$  il sottoimpilamento di  $H_\epsilon$  dato da  $\mathcal{I}_\epsilon = U_\epsilon \cup B_\epsilon$

**Proposizione 1.35.** *Lo 1-complesso in  $S^2$  ottenuto aggiungendo al nervo di  $\mathcal{I}_\epsilon$  il vertice  $\infty$  e i segmenti geodetici che congiungono  $\infty$  ai centri dei cerchi di bordo è lo 1-scheletro di una triangolazione di  $S^2$ .*

Si osservi che la proposizione sarebbe falsa se nel definire  $U_\epsilon$  si fosse omessa la condizione sui fiori dei cerchi della catena. Tale condizione permette invece di dimostrare il seguente

**Lemma 1.36.** *Nell'impilamento  $B_\epsilon$ , ogni cerchio è tangente ad almeno due cerchi la distanza tra cui è maggiore di 1.*

*Dimostrazione.* Sia  $C \in B_\epsilon$ ; allora  $C$  è tangente a qualche  $C' \in U_\epsilon$ . Nell'impilamento dato dai cerchi di  $\mathcal{I}_\epsilon$  tangenti a  $C$ , si consideri la catena più lunga che contiene  $C'$ ; essa ha lunghezza compresa tra 3 e 5. Il primo e l'ultimo cerchio della catena sono cerchi di bordo, sono distinti e non sono tangenti.  $\square$

*Dimostrazione della proposizione 1.35.* Basta dimostrare che  $B_\epsilon$  è un ciclo, e che la spezzata associata è una curva di Jordan il cui interno contiene i cerchi di  $U_\epsilon$ . Poiché  $D$  è limitato,  $B_\epsilon$  è finito; per il lemma, contiene almeno un ciclo  $S$  di lunghezza maggiore di 3. La spezzata associata a esso divide  $\mathbb{C}$  in due parti  $A_0$  e  $A_1$ ; poiché  $D$  è semplicemente connesso,  $D \supset A_i$  per qualche  $i$ . Per

assurdo, sia  $0 \in A_{1-i}$ ; siano  $C, C' \in S$  non tangenti. Ognuno di essi è congiunto a  $C_0$  da una catena in cui tutti i cerchi tranne il primo stanno in  $U_\epsilon$ ; quindi esiste una catena  $C, C_1, \dots, C_n, C'$  dove i  $C_i$  stanno in  $U_\epsilon$ . Questa catena può essere completata a un ciclo in  $\mathcal{I}_\epsilon$  in due modi distinti, aggiungendovi le due catene con estremi  $C$  e  $C'$  di cui è composto il ciclo  $S$ . Si vede che la parte interna la spezzata associata a un ciclo  $S_1$  dei due così ottenuti (che è contenuta in  $D$  perché questo è semplicemente connesso) contiene tutti i cerchi di  $S \setminus S_1$ , quindi i fiori di questi ultimi sono contenuti in  $D$ ; questo contraddice il fatto che siano di bordo, per cui  $0 \in A_i$ . Ne segue che  $U_\epsilon$  contiene tutti e soli i cerchi di  $H_\epsilon$  che stanno nella parte interna la spezzata associata a  $S$ , e di conseguenza  $S = B_\epsilon$ .  $\square$

Ottenuta la triangolazione di  $S^2$ , applicando il teorema di Andreev si trova che esiste un impilamento  $\mathcal{I}'_\epsilon$  di  $S^2$  e un omeomorfismo  $\phi_\epsilon : S^2 \rightarrow S^2$  che preserva l'orientazione e che manda la triangolazione costruita nella proposizione 1.35 nella triangolazione associata a  $\mathcal{I}'_\epsilon$ . A meno di applicare un'opportuna omografia, si può supporre che  $\phi_\epsilon(\infty) = \infty$ , e che  $S^2 \setminus D^2$  sia un cerchio di  $\mathcal{I}'_\epsilon$ . Poiché si era supposto  $\epsilon < d(0, \mathbb{C} \setminus D)/3$ , se si fissa un punto  $x_1 \neq 0$  tale che  $|x_1| = d(0, \mathbb{C} \setminus D)/3$  si ha che  $x_1 \in D_\epsilon$ ; questo permette di supporre  $\phi_\epsilon(0) = 0, \phi_\epsilon(x_1) \in \mathbb{R}^+$  per ogni  $\epsilon$ . Con queste condizioni,  $\mathcal{I}'_\epsilon$  è unico; resta da dimostrare il seguente

**Teorema 1.37 (Rodin-Sullivan).** *Per  $\epsilon \rightarrow 0$ ,  $\phi_\epsilon|_D$  converge a un omeomorfismo olomorfo  $\phi : D \rightarrow D^2$ .*

### 1.3.3 Mappe quasiconformi

La mappa approssimata costruita nel paragrafo precedente è quasiconforme; la dimostrazione del teorema 1.37 utilizza alcuni risultati sulle mappe quasiconformi che vengono qui elencati senza dimostrazione.

Un quadrilatero in  $\mathbb{C}$  è un dominio di Jordan  $Q \subset \mathbb{C}$  (ossia un aperto il cui bordo è il supporto di una curva di Jordan chiusa) sul cui bordo sono fissati punti distinti  $z_1, z_2, z_3, z_4$ , detti vertici, ordinati secondo l'orientazione positiva di  $\partial Q$ . Gli archi di bordo da  $z_1$  a  $z_2$  e da  $z_3$  a  $z_4$  sono detti *lati a*, mentre gli archi da  $z_2$  a  $z_3$  e da  $z_4$  a  $z_1$  sono detti *lati b*. Si dice che  $Q$  e  $Q'$  sono quadrilateri equivalenti se esiste un biolomorfismo da  $Q$  in  $Q'$  che si estende a un omeomorfismo da  $\overline{Q}$  in  $\overline{Q}'$ , e che manda i vertici di  $Q$  nei vertici corrispondenti di  $Q'$ . Vale il seguente teorema, per la cui dimostrazione, così come per quella degli altri risultati di questa sezione, si rimanda a [12]:

**Teorema 1.38.** *Se  $G, G' \subset \mathbb{C}$  sono domini di Jordan, ed esiste un biolomorfismo  $\phi : G \rightarrow G'$ , allora  $\phi$  si estende a un omeomorfismo  $\tilde{\phi} : \overline{G} \rightarrow \overline{G}'$ .*

Per il teorema dell'applicazione di Riemann, un quadrilatero  $Q$  è biolomorfo al disco; per il teorema,  $Q$  è equivalente a  $D^2$  con vertici  $w_1, w_2, w_3, w_4$ ; componendo con un automorfismo del disco, si può supporre  $w_1 = 0, w_2 = i, w_3 = -1,$

e  $w_4$  tra  $-1$  e  $0$ . Si vede così che le classi di equivalenza dei quadrilateri dipendono da un parametro. Usando l'espressione esplicita dell'applicazione di Riemann nel caso del rettangolo, si vede che ogni classe di equivalenza contiene un rettangolo. D'altra parte se due rettangoli sono equivalenti, per il principio di riflessione la mappa che dà l'equivalenza può essere estesa a un biolomorfismo di  $\mathbb{C}$  in sè, e quindi oltre che conforme è affine (si veda [7]). Risulta così ben definito il modulo  $|Q| = a/b$ , dove  $a$  e  $b$  sono le lunghezze dei lati  $a$  e dei lati  $b$  di un rettangolo equivalente a  $Q$ . Questo modo di procedere ha il difetto di utilizzare il teorema che si vuole dimostrare; si dà perciò la seguente

**Definizione 1.39.** *Sia  $Q \subset \mathbb{C}$  un quadrilatero, e  $\Gamma$  l'insieme delle curve di Jordan localmente rettificabili che hanno un estremo su ogni lato a di  $Q$ . Sia*

$$\mathcal{P} = \{\rho \in L^2(\mathbb{C}) \mid \rho \geq 0, \|\rho\|_2 \neq 0\};$$

allora il modulo di  $Q$  è

$$|Q| = \inf_{\rho \in \mathcal{P}} \frac{\int_Q \rho^2}{\left(\inf_{\gamma \in \Gamma} \int_{\gamma} \rho |dz|\right)^2}.$$

Con questa definizione, vale la seguente

**Proposizione 1.40.** *Due quadrilateri equivalenti hanno lo stesso modulo. Un rettangolo di lati  $a$  e  $b$  ha modulo  $a/b$ .*

Dunque le definizioni sono equivalenti.

**Definizione 1.41.** *Una funzione  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ , dove  $D \subset \mathbb{C}$  è aperto, si dice  $K$ -quasiconforme se è un omeomorfismo con l'immagine, preserva l'orientazione e  $K^{-1}|Q| \leq |f(Q)| \leq K|Q|$  per ogni quadrilatero  $Q \subset D$ .*

Vale banalmente:

**Proposizione 1.42.** *Se  $f$  è  $K$ -quasiconforme, allora  $f^{-1}$  è  $K$ -quasiconforme.*

Si hanno le seguenti caratterizzazioni:

**Teorema 1.43.** *Dato  $K \geq 1$ , una funzione  $f \in \mathcal{C}^1(D, \mathbb{C})$  che è un omeomorfismo con l'immagine e preserva l'orientazione è  $K$ -quasiconforme se e solo se*

$$\max_{\eta \in S^1} \left| \frac{\partial f}{\partial \eta}(x) \right| \leq K \min_{\eta \in S^1} \left| \frac{\partial f}{\partial \eta}(x) \right| \quad \forall x \in D,$$

dove  $\frac{\partial f}{\partial \eta}$  è la derivata lungo la direzione  $\eta$ .

**Corollario 1.44.** *Una funzione affine invertibile che preserva l'orientazione  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  è  $K$ -quasiconforme se e solo se manda un triangolo equilatero in un triangolo in cui i rapporti tra i lati sono compresi tra  $K^{-1}$  e  $K$ .*

**Teorema 1.45.** *Sia  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  un omeomorfismo con l'immagine; allora  $f$  è  $K$ -quasiconforme se e solo se lo è in un intorno di ogni punto.*

**Teorema 1.46.** *Una funzione 1-quasiconforme è olomorfa.*

Quindi il concetto di mappa quasiconforme estende quello di mappa conforme (nel senso di biolomorfismo con l'immagine); in effetti, alcuni risultati si generalizzano:

**Teorema 1.47.** *Se  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  è un omeomorfismo con l'immagine ed è  $K$ -quasiconforme in  $D \setminus \Gamma([0, 1])$  dove  $\Gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$  è un arco analitico chiuso, e  $\gamma((0, 1)) \subset D$ , allora  $f$  è  $K$ -quasiconforme in  $D$ .*

**Teorema 1.48.** *Sia  $\mathcal{F}$  una famiglia di funzioni  $K$ -quasiconforme da  $D \subset \mathbb{C}$  in  $\mathbb{C} \setminus \{x_1, x_2\}$ , dove  $x_1 \neq x_2$ . Allora  $\mathcal{F}$  è equicontinuo in  $\mathcal{C}(D, \mathbb{C})$ .*

**Teorema 1.49.** *Il limite in  $\mathcal{C}(D, \mathbb{C})$  di una successione di funzioni  $K$ -quasiconforme è  $K$ -quasiconforme oppure assume al più 2 valori distinti.*

**Corollario 1.50.** *Dato un aperto  $D \subset \mathbb{C}$  e una successione convergente  $\{f_n\}$  in  $\mathcal{C}(D, \mathbb{C})$ , dove  $f_n : D \rightarrow \mathbb{C}$  è una funzione  $K_n$ -quasiconforme, se  $K_n \rightarrow 1$  allora  $f = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$  è una funzione conforme oppure assume al più 2 valori distinti.*

*Dimostrazione.* Esclusi i casi degeneri, per il teorema 1.49  $f$  è  $K$ -quasiconforme per ogni  $K > 1$ . Allora dato un quadrilatero  $Q$  in  $D$ ,  $K^{-1}|Q| \leq |f(Q)| \leq K|Q|$  per ogni  $K > 1$ , per cui  $|Q| = |f(Q)|$ ; quindi  $f$  è 1-quasiconforme, e per il teorema 1.46 è conforme.  $\square$

### 1.3.4 Dimostrazione del teorema 1.37

La dimostrazione qui proposta, che è quella di [8], non dà un ordine di convergenza determinato perché si basa sul lemma 1.56, la cui dimostrazione non è costruttiva.

**Lemma 1.51.** *Fissato  $n$  intero positivo, esiste una funzione non decrescente  $\epsilon_n : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  tale che per qualunque cerchio  $C$  tangente esternamente a  $C_0 = \overline{D^2}$  e qualunque impilamento che contenga  $C$  e  $C_0$ , una catena di cerchi  $C, C_1, \dots, C_n$  tangenti esternamente a  $C_0$  con  $r(C_1) < \epsilon_n(r(C))$  è tutta contenuta nell'involuppo convesso euclideo di  $C$  e  $C_0$ .*

*Dimostrazione.* Si può supporre che  $C_0$  intersechi  $C$  in  $-1$ . Per  $d > 0$ , sia  $E_d(C)$  l'insieme di tutti i cerchi  $C'$  tangenti esternamente a  $C_0$  che non intersecano la parte interna di  $C$ , e la cui distanza da  $-1$  sia  $d(C') = |z(C') + 1| - r(C') = d$ . Il luogo dei centri dei cerchi di  $E_d(C)$  è contenuto in un ramo d'iperbole, perché tali cerchi sono tangenti a  $C_0$  e a  $B(-1, d)$  e quindi la differenza delle distanze del loro centro da  $0$  e  $-1$  è pari a  $1 - d$ . Analogamente, per la condizione

su  $C$ , il centro di ogni  $C' \in E_d(C)$  sta dalla stessa parte di  $C_0$  rispetto a un ramo d'iperbole  $\Gamma_C$  che dipende solo da  $C$ , e che al crescere del raggio di  $C$  si "sposta" verso  $C_0$ , di modo che  $\{z(C') \mid C' \in E_d(C)\} \subset \{z(C') \mid C' \in E_d(\tilde{C})\}$  se  $r(C) > r(\tilde{C})$ . Si vede quindi che per  $C$  fissato, al tendere di  $d$  a 0,  $z(C') \rightarrow -1$  uniformemente, e quindi

$$\lim_{d \rightarrow 0} \sup_{C' \in E_d(C)} r(C') \rightarrow 0;$$

inoltre  $\sup_{C' \in E_d(C)} r(C')$  è una funzione non crescente del raggio di  $C$ . Per  $r > 0$ , sia  $S_r(C)$  l'insieme delle sequenze  $C, C_1, \dots, C_n$  di cerchi tangenti esternamente a  $C_0$  tali che  $r(C_1) = r$ , e che sono catene in qualche impilamento. Per ognuna di queste catene,  $C_1$  deve essere tangente sia a  $C_0$  che a  $C$ , per cui  $z(C_1) \in \partial B(0, 1+r) \cap \Gamma_C$ ; si vede quindi che

$$\lim_{r \rightarrow 0} \max_{\{C, C_1, \dots, C_n\} \in S_r(C)} d(C_1) = 0;$$

e  $\max_{\{C, C_1, \dots, C_n\} \in S_r(C)}$  è una funzione decrescente di  $r(C)$ . Per la disuguaglianza triangolare,  $d(C_{i+1}) \leq d(C_i) + 2r(C_i)$ ,  $i \geq 1$ , quindi

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow 0} \sup_{\{C, C_1, \dots, C_n\} \in S_r(C)} d(C_i) &= 0 \\ \lim_{r \rightarrow 0} \sup_{\{C, C_1, \dots, C_n\} \in S_r(C)} r(C_i) &= 0 \end{aligned}$$

per  $i = 1, \dots, n$ , in particolare

$$\lim_{r \rightarrow 0} \sup_{\{C, C_1, \dots, C_n\} \in S_r(C)} d(C_n) + 2r(C_n) = 0$$

e  $\sup_{\{C, C_1, \dots, C_n\} \in S_r(C)} d(C_n) + 2r(C_n)$  è una funzione decrescente di  $r(C)$ . Se  $\hat{C}$  è il cerchio con centro in  $-1$  tangente internamente all'involuppo convesso euclideo di  $C$  e  $C_0$ , e si pone

$$\epsilon_n(r(C)) = \sup\{r \mid \text{ogni catena di } S_r(C) \text{ è contenuta in } \hat{C}\},$$

la tesi segue.  $\square$

**Corollario 1.52.** *Per ogni  $n \in \mathbb{N}$  esiste  $r(n)$  tale che se  $C_1, \dots, C_n$  è un ciclo di cerchi tangenti esternamente al disco unitario in un impilamento in  $\mathbb{C}$ , allora  $r(C_i) \geq r(n)$  per ogni  $i$ .*

*Dimostrazione.* La spezzata euclidea associata al ciclo delimita un poligono di area maggiore di  $\pi$ , quindi il suo perimetro  $2 \sum_{i=1}^n r(C_i)$  dev'essere maggiore di  $2\pi$ . In particolare, si può supporre  $r(C_1) > \pi/n$ . Applicando il lemma si trova  $r(C_2) > \epsilon_{n-1}(\pi/n)$ ,  $r(C_3) > \epsilon_{n-2}(\epsilon_{n-1}(\pi/n))$ , e così via.  $\square$

**Corollario 1.53.** *Fissato un cerchio  $C$  tangente internamente a  $D^2$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , esiste  $r$  tale che se  $C_1, \dots, C_n, C_\infty$  è un ciclo di cerchi tangenti esternamente a  $C$ , allora  $r(C_i) \geq r$  per ogni  $i$ .*

*Dimostrazione.* La spezzata euclidea associata al ciclo ha lunghezza maggiore del diametro di  $C$ , perché l'ha la sua proiezione ortogonale sulla tangente comune di  $C$  e  $D^2$ . Quindi esiste un  $r_0 > 0$  che dipende solo da  $C$  e  $n$  tale che  $r(C_k) > r_0$  per qualche  $k$ . Ora, per ogni  $i = 1, \dots, n$ , l'involuppo convesso di  $C_i$  e  $C$  non interseca  $C_\infty$ . Se  $k > 1$ , il lemma 1.51 dà  $r(C_{k-1}) > \epsilon_{k-1}(r_0)$ ,  $r(C_{k-2}) > \epsilon_{k-2}(\epsilon_{k-1}(r_0))$  e così via; d'altra parte se  $k < n$  il lemma 1.51 dà  $r(C_{k+1}) > \epsilon_{n-k-1}(r_0)$ ,  $r(C_{k+2}) > \epsilon_{n-k-2}(\epsilon_{n-k-1}(r_0))$  e così via. In questo modo si trova una limitazione inferiore  $r_k > 0$  per il raggio di ogni  $C_i$ . Questo dimostra la tesi per  $r = \min\{r_k \mid k = 1, \dots, n\}$ .  $\square$

**Lemma 1.54.** *Sia dato un impilamento di cerchi di  $D^2$ , con due cerchi fissati  $C, C_0$ , con  $0 \in C_0$ . Siano  $S_1, \dots, S_k$  cicli disgiunti nell'impilamento di  $S^2$  ottenuto aggiungendo  $C_\infty$  che separano  $C$  e  $C_0$ , e non separano  $C_0$  da  $C_\infty$  (figura 1.3.1). Per  $i = 1, \dots, k$ , sia  $n_i$  il numero di cerchi di  $S_i$  contenuti in  $D^2$  (ossia la lunghezza della catena in  $D^2$ ). Allora*

$$\frac{1}{r(C)^2} > \sum_{i=1}^k \frac{1}{n_i}.$$

*Dimostrazione.* Sia  $E_i$  la spezzata euclidea di  $S_i$ ; la lunghezza euclidea  $s_i$  di  $E_i$  è maggiore di  $2r(C)$ . Infatti, se  $S_i$  non contiene  $C_\infty$ ,  $E_i$  è una curva di Jordan e  $C$  si trova nel suo interno, perché per ipotesi  $E_i$  non separa  $C_0$  e  $C_\infty$ , per cui  $s_i > 2\pi r(C) > 2r(C)$ . Se invece  $S_i$  contiene  $C_\infty$ , sia  $E_i \cap C_\infty = \{x_1, x_2\}$ ; aggiungendo ad  $E_i$  l'arco più breve di  $\partial D^2$  che congiunge  $x_1$  e  $x_2$ , si ottiene una curva di Jordan, il cui interno contiene  $C$  oppure contiene  $C_0$ . Nel primo caso, la proiezione ortogonale della spezzata euclidea di  $S_i$  sulla retta che passa per  $x_1$  e  $x_2$  è maggiore del diametro di  $C$ , per cui  $s_i > 2r(C)$ . Nel secondo, è chiaro che  $E_i$  contiene un punto  $x$  non in  $B(x_1, 1) \cup B(x_2, 1)$ , quindi  $s_i \geq |x - x_1| + |x - x_2| \geq 2 > 2r(C)$ .

Siano  $r_{ij}, j = 1, \dots, n_i$  i raggi in  $\mathbb{C}$  dei cerchi in  $D^2$  di  $S_i$ . Per la disuguaglianza di Schwarz,

$$\left( \sum_{j=1}^{n_i} r_{ij} \right)^2 \leq n_i \sum_{j=1}^{n_i} r_{ij}^2$$

Essendo  $s_i = 2 \sum_{j=1}^{n_i} r_{ij}$ , si ottiene

$$r(C)^2 < \left( \frac{s_i}{2} \right)^2 \leq n_i \sum_{j=1}^{n_i} r_{ij}^2$$

da cui

$$r(C)^2 \sum_{i=1}^k \frac{1}{n_i} < \sum_{i,j} r_{ij}^2 \leq 1$$

perché  $\pi \sum_{i,j} r_{ij}^2$  dev'essere minore o uguale dell'area di  $D^2$ .  $\square$

**Definizione 1.55.** Se  $n$  è un intero positivo,  $H_1^n$  è l'impilamento dato dai cerchi di  $H_1$  che hanno distanza minore o uguale a  $n$  da  $C_0$ . Se  $\mathcal{I}$  è un impilamento equivalente a  $H_1^n$ , si dice che il cerchio di  $\mathcal{I}$  corrispondente a  $C_0$  è il cerchio centrale di  $\mathcal{I}$ .

È chiaro che la definizione di cerchio centrale non dipende dalla mappa che dà l'equivalenza.

**Lemma 1.56.** Esiste una successione decrescente  $\{s_n\}$ , con  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = 0$ , tale che se  $P_n$  è un impilamento nel piano equivalente ad  $H_1^n$ , e se due cerchi del fiore intorno al cerchio centrale hanno raggi  $r_1$  e  $r_2$ , allora  $\left| \frac{r_1}{r_2} - 1 \right| < s_n$ .

*Dimostrazione.* La tesi è equivalente a dimostrare che esiste  $\{c_n\} \searrow 0$  tale che, per ogni  $P_n$  equivalente ad  $H_1^n$  il cui cerchio centrale sia  $B(0, 1)$ , se un cerchio tangente al cerchio centrale ha raggio  $r$ , allora  $|r - 1| < c_n$ . Per assurdo, sia  $\delta > 0$  tale che per ogni  $n$ , esiste  $P_n$  equivalente ad  $H_1^n$ , con un cerchio  $C$  tangente al cerchio centrale tale che  $|r(C) - 1| > \delta$ . Si dirà che un cerchio di  $P_n$  è di generazione  $k$  se la sua distanza dal cerchio centrale è  $k$ . Per ogni cerchio  $C$  di  $P_n$  di generazione  $k$  e  $n > k$ , per il corollario 1.52 si ha che  $r(6)^{-k} \leq r(C) \leq r(6)^k$ . Inoltre per la disuguaglianza triangolare  $|z(C)| \leq r(6)^k + 2r(6)^{k-1} + \dots + 2r(6) + 1$ . Dunque l'insieme

$$\{(z_1, r_1), \dots, (z_l, r_l) \mid \overline{\{B(z_i, r_i)\}_{i=1, \dots, l}} \text{ sono i cerchi di generazione } k \text{ di qualche } P_n, n > k\}$$

è equilimitato. Si può dunque estrarre una sottosuccessione  $\{P_{1k}\}_{k \in \mathbb{N}}$  tale che i cerchi di generazione 1 convergono (cioè i raggi e i cerchi convergono in  $\mathbb{C}$  ed  $\mathbb{R}^+$ ); iterativamente, si estrae da  $\{P_{jk}\}_{k \in \mathbb{N}}$  una sottosuccessione  $\{P_{j+1,k}\}_{k \in \mathbb{N}}$  tale che i cerchi di generazione  $j + 1$  convergono. La successione  $P_{kk}$  converge a un impilamento  $\mathcal{I}$  equivalente ad  $H_1$  perché due cerchi  $C_1$  e  $C_2$  hanno parte interna disgiunta se e solo se  $|z(C_1) - z(C_2)| \geq r(C_1) + r(C_2)$ , mentre sono tangenti se e solo se  $|z(C_1) - z(C_2)| = r(C_1) + r(C_2)$ , e queste relazioni passano al limite. Il supporto di  $\mathcal{I}$  è una regione connessa e semplicemente connessa, perché è unione di regioni di questo tipo contenute una nell'altra; inoltre  $\mathcal{I}$  ha un cerchio di generazione 1 con raggio diverso da 1, mentre il cerchio centrale ha raggio 1, contraddicendo il teorema 1.34.  $\square$

**Teorema 1.57 (Rodin-Sullivan).** Siano  $T_\epsilon$  e  $T'_\epsilon$  le triangolazioni euclidee associate a  $\mathcal{I}_\epsilon$  e  $\mathcal{I}'_\epsilon$ ; siano  $D_\epsilon$  e  $D'_\epsilon$  i loro supporti. Per  $\epsilon \rightarrow 0$ , l'omeomorfismo della proposizione 1.30  $\phi_\epsilon : D_\epsilon \rightarrow D'_\epsilon$  converge a un biolomorfismo  $\phi : D \rightarrow D^2$ .

*Dimostrazione.*  $D_\epsilon$  converge a  $D$ , nel senso che per ogni  $K \subset D$  compatto esiste  $\epsilon_K > 0$  tale che  $D_\epsilon \supset K$  per  $\epsilon < \epsilon_K$ . Per dimostrarlo, si può supporre che  $K$  sia connesso (perché il numero delle sue componenti è finito).  $K$  ha un intorno aperto connesso  $U \subset \bar{U} \subset D$ , relativamente compatto perché  $D$  è limitato; se  $\delta$  è la distanza di  $U$  dal complementare di  $D$ ,  $\delta > 0$  perché  $D$  è aperto. Per

ogni  $x \in K$  esiste un arco  $\gamma : ([0, 1], 0, 1) \rightarrow (U, 0, x)$ , e per costruzione  $\gamma([0, 1])$  ha distanza maggiore o uguale di  $\delta$  dal complementare di  $D$ . Per  $\epsilon$  qualunque,  $x$  sta nella parte interna dell'esagono formato dall'unione di 6 triangoli della triangolazione euclidea associata a  $H_\epsilon$  che hanno un vertice comune; i vertici dell'esagono sono centri di cerchi che formano un ciclo  $S_\epsilon$ . È chiaro che se  $\epsilon < \delta/4$  i cerchi di  $S_\epsilon$  sono contenuti in  $D$  ed esiste una catena di cerchi attraversati da  $\gamma$  che congiungono  $C_0$  a qualche cerchio di  $S_\epsilon$ , tale che ogni suo cerchio ha fiore contenuto in  $D$ ; quindi il cerchio interno a  $S_\epsilon$  è in  $U_\epsilon$ , e ogni cerchio di  $S_\epsilon$  è in  $\mathcal{I}_\epsilon$ . Quindi  $x \in D_\epsilon$ , cioè  $K \subset D_\epsilon$ .

Analogamente,  $D'_\epsilon$  converge a  $D^2$ ; poiché in questo caso è nota la geometria del bordo, basta dimostrare che i raggi dei cerchi di bordo sono uniformemente limitati. Se  $d$  è la distanza di 0 dal bordo di  $D$ , la distanza di  $C_0$  da un cerchio di bordo  $C$  è maggiore o uguale di  $\frac{d}{2\epsilon}$ ; sia  $n$  la parte intera di  $\frac{d}{2\epsilon}$  (per cui  $n$  è un intero che non dipende da  $C$  e tende a  $+\infty$  per  $\epsilon \rightarrow 0$ ). I bordi delle palle in  $T'_\epsilon$  di centro  $C$  e raggio  $1, 2, \dots, n$  sono cicli che separano  $C$  da  $C_0$ , e non separano  $C_0$  da  $C_\infty$ ; per il lemma 1.54, si ha

$$r(C) < \left( \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} \right)^{-2}$$

dove il secondo termine non dipende da  $C$  e tende a 0 per  $\epsilon \rightarrow 0$ .

Per i corollari 1.52 e 1.53 esiste una costante  $K$  tale che in ogni triangolo di  $T'_\epsilon$  i rapporti tra le lunghezze dei lati sono compresi tra  $K^{-1}$  e  $K$ , e quindi per il corollario 1.44 le restrizioni delle  $\phi_\epsilon$  ai triangoli di  $T'_\epsilon$  sono  $K$ -quasiconformi; per il teorema 1.47, sono  $K$ -quasiconformi in  $D$ , con  $K$  che non dipende da  $\epsilon$ .

Per il teorema 1.48, l'insieme  $\{\phi_\epsilon|_K \mid D_\epsilon \supset A\}$  è equicontinuo per ogni compatto  $A \subset D$ ; è anche equilimitato perché l'immagine è contenuta nel disco unitario, per cui si può applicare il teorema di Ascoli-Arzelà. Sia  $D = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n$ , dove  $K_n$  sono compatti,  $K_i \subset K_{i+1}$ ; sia  $\phi_{\epsilon_n}$  una successione con  $\epsilon_n \rightarrow 0$ ; poiché per  $n$  sufficientemente grande  $D_{\epsilon_n} \supset K_1$ , una sua sottosuccessione  $\phi_{\epsilon'_n}$  converge in  $K_1$ . Analogamente, per  $k > 1$  una sottosuccessione  $\phi_{\epsilon''_n}$  di  $\phi_{\epsilon'_n}$  converge in  $K_k$ ; la successione  $\phi_{\epsilon''_n}$  converge uniformemente sui compatti di  $D$  a una funzione  $\phi$ . Si vuole dimostrare  $\phi(D) = D^2$ . Sia dunque  $w \in D^2$ , e sia  $G$  un aperto con  $0, w \in G \subset \bar{G} \subset D^2$ ; per  $\epsilon$  sufficientemente piccolo, esiste  $g_\epsilon : G \rightarrow D$  tale che  $\phi_\epsilon \circ g_\epsilon$  è l'identità.  $g_\epsilon$  è  $K$ -quasiconforme per la proposizione 1.42. Per il teorema 1.48, poiché  $D$  è limitato, si può applicare il teorema di Ascoli-Arzelà e quindi esiste una sottosuccessione  $\epsilon'_n$  di  $\epsilon_n$  tale che  $\phi_{\epsilon'_n} \rightarrow \phi$  e  $g_{\epsilon'_n} \rightarrow g$ . Allora  $w = \phi_{\epsilon'_n}(g_{\epsilon'_n}(w)) \rightarrow \phi(g(w))$ , per cui  $w \in \phi(D)$ . Per il teorema 1.49  $\phi$  è allora  $K$ -quasiconforme su ogni  $K_k$ , per cui lo è su  $D$  per il teorema 1.45. In particolare, è iniettiva; inoltre è aperta e quindi ha immagine contenuta in  $D^2$ . Rimane da vedere che è olomorfa.

Fissato un compatto  $K \subset D$ , per ogni  $\epsilon$  esiste un  $n(\epsilon)$  tale che per ogni cerchio  $C$  contenuto in  $K$ , la palla in  $H_\epsilon$  di centro  $C$  e raggio  $n(\epsilon)$  è contenuta in  $\mathcal{I}_\epsilon$ ;

inoltre

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} n(\epsilon) = +\infty .$$

Per il lemma 1.56 e il corollario 1.44,  $\phi_\epsilon|_K$  è  $\left(\frac{1+s_n(\epsilon)}{1-s_n(\epsilon)}\right)$ -quasiconforme; allora per il corollario 1.50,  $\phi|_K$  è conforme, quindi  $\phi$  è conforme. Poiché si ha  $\phi(0) = 0$ ,  $\phi(x_1) \in \mathbb{R}^+$ ,  $\phi$  è l'unico biolomorfismo  $\phi : D \rightarrow D^2$  con queste proprietà, e quindi non dipende dalla successione  $\epsilon_n$  che si era scelta.  $\square$

## 1.4 Verso una versione costruttiva del teorema di Andreev

In questo paragrafo si descrive un algoritmo esplicito, anch'esso riportato in [8] e attribuito a Thurston, per calcolare esplicitamente la triangolazione di cui il teorema di Andreev afferma l'esistenza; combinando questo algoritmo con la procedura descritta nel paragrafo precedente, si ottiene un algoritmo esplicito per approssimare la mappa di Riemann.

Si dimostra poi il teorema di Andreev adattando i metodi di [9], che tratta il problema analogo per superfici con  $\chi \leq 0$ ; questa dimostrazione, come quella a cui si ispira, non è del tutto costruttiva. L'algoritmo determina i raggi dei cerchi per approssimazioni successive; applicando gli stessi metodi, si determinerà un intorno della soluzione tale che l'algoritmo converge per una data configurazione iniziale di raggi se e solo se applicandovelo un numero sufficientemente grande di volte si ottiene qualche configurazione di tale intorno. Inoltre questo intorno viene dato in modo esplicito, nel senso che esiste un semplice algoritmo per determinare se una data configurazione di raggi vi appartiene.

Sia  $\tau_0$  una triangolazione di  $S^2$  fissata non degenera, nel senso che l'intersezione di due triangoli non disgiunti sia un vertice comune o un lato comune; sia  $V = \{a, b, c, v_1, \dots, v_k\}$  l'insieme dei vertici, in modo che  $a, b$  e  $c$  siano vertici di un triangolo  $E$  di  $\tau_0$ . Sia  $\tau$  la triangolazione ottenuta da  $\tau_0$  togliendo  $E$ . Data una mappa  $r \in [0, +\infty]^V$  che a ogni vertice associa il raggio del cerchio che ha centro in quel vertice, ogni triangolo di  $\tau$  può essere realizzato come triangolo euclideo tale che il lato che congiunge  $v$  a  $w$  abbia lunghezza  $r(v) + r(w)$ . Incollando i triangoli secondo lo schema di  $\tau$ , e incollando al posto di  $E$  il complementare nel piano di un triangolo euclideo di lati  $r(a) + r(b)$ ,  $r(b) + r(c)$ ,  $r(a) + r(c)$ , si ottiene uno spazio topologico  $S_r$  omeomorfo a  $\mathbb{C}$ ; se si identifica l'insieme  $V$  con la sua immagine in  $S_r$ , assegnando sui triangoli la metrica euclidea, si ottiene una metrica riemanniana in  $S_r \setminus V$  che la rende una superficie piatta (ossia di curvatura identicamente nulla).

Per una superficie riemanniana orientata, vale il seguente teorema, per la cui dimostrazione si rimanda a [1].

**Teorema 1.58 (Gauss-Bonnet).** *Sia  $M$  una superficie riemanniana orientata triangolabile, con elemento di superficie  $dA$  e curvatura  $K$ , e sia  $S$  un aperto*

di  $M$  tale che le componenti di  $\partial S$  (con l'orientazione indotta dall'inclusione  $S \subset M$ ) sono parametrizzate da curve  $\gamma_1, \dots, \gamma_n$  semplici,  $C^\infty$  a tratti e che preservano l'orientazione. Siano  $\theta_{i1}, \dots, \theta_{ip_i}$  gli angoli esterni della curve  $\gamma_i$ . Allora vale:

$$\sum_{i=1}^n \int_{\gamma_i} k_i + \int_S K dA + \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^{p_j} \theta_{ji} = 2\pi\chi(S), \quad (1.5)$$

dove  $k_i$  è la 1-forma sul fibrato pullback  $\gamma_i^\#(TM)$  che dà la curvatura geodetica di  $\gamma_i$ .

Per  $v \in V$ , sia  $l_v$  il numero dei vertici adiacenti a  $v$  (ossia il numero dei lati di cui  $v$  è un estremo, quindi  $l_v \geq 3$  perché  $\tau_0$  non è degenere), sia  $A(v) = \alpha_v^1, \dots, \alpha_v^{l_v}$  l'insieme degli angoli dei triangoli di  $\tau_0$  con vertice in  $v$ , e siano  $m_r(\alpha_v^1), \dots, m_r(\alpha_v^{l_v})$  le loro misure in  $S_r$ ; si intende

$$m_r(\widehat{abc}) = m_r(\widehat{cab}) = m_r(\widehat{bca}) = \frac{5}{3}\pi.$$

Esiste un unico modo di estendere  $KdA$  ad  $S_r$  in modo che il teorema sia ancora valido, imponendo cioè  $KdA = \sum_{i=1}^k k(r)(v_i)\delta_v$ , dove  $\delta_v$  è la  $\delta$  di Dirac in  $v$  e

$$k(r)(v) = 2\pi - \sum_{\alpha \in A(v)} m_r(\alpha), \quad v \in V$$

è la “curvatura concentrata” in  $v$ . Si osservi che  $k$  è  $C^\infty$  su  $(0, +\infty)^V$  perché  $r \rightarrow m_r(\alpha)$  lo è per ogni angolo  $\alpha$ . Allora  $S_r$  è isometrico (oltre che omeomorfo) a  $\mathbb{C}$  per tutti e soli gli  $r$  tali che  $k(r)$  è identicamente nullo; si può determinare in modo esplicito l'unica isometria  $f : S_r \rightarrow \mathbb{C}$  che preserva l'orientazione tale che  $f(a) = 0$  e  $f(b) \in \mathbb{R}^+$ ; l'insieme dei cerchi  $B(f(v), r(v))$  è l'impilamento cercato. Viceversa, siano  $\mathcal{I}$  e  $\mathcal{I}'$  due impilamenti di  $S^2$  le cui triangolazioni associate sono isomorfe a  $\tau_0$ , con un isomorfismo che preserva l'orientazione; in particolare, sono equivalenti. Si può supporre, a meno di applicare opportune omografie, che gli isomorfismi mandino  $\infty$  in un punto fissato di  $E$ . Siano  $r, r' \in (0, +\infty)^V$  le applicazioni che danno il raggio euclideo di ogni vertice; si ha  $k(r) \equiv 0 \equiv k(r')$ . Se  $r$  e  $r'$  sono proporzionali, esiste una mappa conforme da  $S_r$  in  $S_{r'}$ ; identificati entrambi con  $\mathbb{C}$ , la mappa ha la forma  $az + b$ , per cui si estende a un'omografia di  $S^2$  in sè che manda  $\mathcal{I}$  in  $\mathcal{I}'$ . Quindi il teorema di Andreev è equivalente a dimostrare che esiste un unico  $r$ , a meno di costante moltiplicativa, tale che  $k(r) \equiv 0$ .

**Lemma 1.59.**  $\sum_{v \in V} k(r)(v) = 0$ .

*Dimostrazione.* Ovvio se si usa il teorema di Gauss-Bonnet. Altrimenti, siano  $|V|$ ,  $|L|$ ,  $|F|$  rispettivamente il numero dei vertici, dei lati e delle facce di  $\tau_0$ . Poiché la somma degli angoli interni di un triangolo euclideo è  $\pi$ ,

$$\sum_{v \in V} k(r)(v) = 2\pi|V| - \pi(|F| - 1) - 5\pi = \pi(2|V| - |F| - 4) = 0$$

perché  $|V| - |L| + |F| = 2$ , e  $3|F| = 2|L|$ , da cui

$$2|V| - 2|L| + 2|F| = 2|V| - |F| = 4. \quad \square$$

**Definizione 1.60.** Se  $W \subset V$ ,  $A_W(w) \subset A(w)$  è l'insieme degli angoli della triangolazione di  $\tau$  del tipo  $\widehat{uvw}$ , dove  $u, v$  e  $w$  sono vertici di qualche triangolo di  $\tau$ ,  $u \in V \setminus W$  e  $v \in V$ . Un tale angolo sarà detto del primo tipo se  $v \in V \setminus W$ , e del secondo tipo se  $v \in W$ ; nel secondo caso, si definisce coniugato di  $\widehat{uvw}$  l'angolo  $\widehat{uwv} \in A_W(v)$  (nella figura 1.4,  $\alpha$  è un angolo del primo tipo mentre  $\beta$  e  $\gamma$  sono due angoli del secondo tipo coniugati). Si indicheranno con  $A'_W(w)$  gli angoli di  $A_W(w)$  del primo tipo, e con  $A''_W(w)$  gli angoli di  $A_W(w)$  del secondo tipo. Si indicherà poi con  $\tau_W$  il 2-complesso ottenuto da  $\tau$  togliendo prima i vertici  $V \setminus W$ , poi i lati tali che un loro estremo è stato tolto e infine i triangoli tali che un loro lato è stato tolto.

**Proposizione 1.61.** Sia  $W \subset V$  non vuoto, tale che  $\{a, b, c\} \not\subset W$ . Allora esiste un aperto  $S_W \subset S_r$  tale che

- $S_W \cap V = W$ ;
- $S_W$  è un intorno del supporto di  $\tau_W$ , che è un suo retratto di deformazione;
- $S_W$  soddisfa le ipotesi del teorema 1.58, e usando le notazioni dell'enunciato del teorema,

$$\sum_{w \in W} k(r)(w) = 2\pi\chi(S_W) - \sum_{w \in W} \left( \sum_{\alpha \in A'_W(w)} \sigma(\alpha)m_r(\alpha) + \sum_{\alpha \in A''_W(w)} \sigma(\alpha)(m_r(\alpha) - \pi/2) \right) \quad (1.6)$$

dove  $\sigma(\alpha)$  vale 1 o  $-1$  a seconda che l'orientazione del bordo di  $\partial S_W$  nell'arco corrispondente ad  $\alpha$  sia positiva o negativa.

- esiste  $W' \neq \emptyset$  tale che  $\{a, b, c\} \cap W' = \{a, b, c\} \cap W$  e ripetendo la costruzione per  $W'$ ,  $\chi(S_{W'}) = 1$ , e per ogni  $w \in W$  se  $\alpha \in A_{W'}(w)$  allora  $\alpha \in A_W(w)$ ,  $\sigma(\alpha) = 1$  e il tipo di  $\alpha$  relativamente a  $W$  è uguale al tipo di  $\alpha$  relativamente a  $W'$  (in altri termini,  $A'_{W'}(w) \subset A'_W(w)$  e  $A''_{W'}(w) \subset A''_W(w)$  per ogni  $w$ ).

*Dimostrazione.* Sia  $\delta > 0$  tale che  $\delta < r(w)$  per ogni  $w \in W$ . Su ogni lato di  $\tau_0$  che congiunge un vertice  $w \in W$  a un vertice di  $V \setminus W$  si fissi il punto che ha distanza  $\delta$  da  $w$ . Si congiungano due tali punti che fanno parte di uno stesso triangolo  $F$  di  $\tau_0$  con un arco di Jordan regolare contenuto in  $F$ , che interseca perpendicolarmente i lati di  $F$ . Se gli angoli di  $F$  sono  $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ , e i vertici di  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  sono in  $W$ , gli angoli corrispondenti all'arco sono gli angoli del secondo tipo coniugati  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$ ; è chiaro che  $\sigma(\alpha_1) = \sigma(\alpha_2)$ . Se  $F \neq E$ , dove  $E$  è il

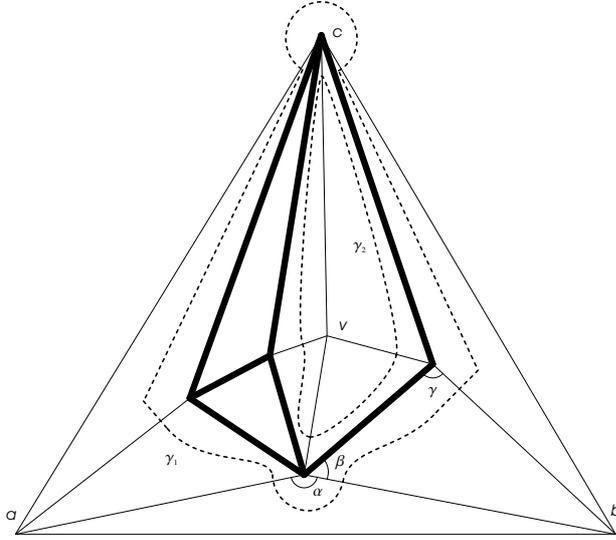


Figura 1.3: Costruzione di  $S_W$ . Le linee evidenziate sono lo 1-scheletro di  $\tau_W$ ;  $\partial S_W = \gamma_1 \cup \gamma_2$ ,  $W' = W \cup \{v\}$  e  $S_{W'}$  è l'interno di  $\gamma_1$ .

triangolo di vertici  $a$ ,  $b$  e  $c$ ,  $m_r(\alpha_1) + m_r(\alpha_2) + m_r(\alpha_3) = \pi$  e quindi l'integrale della curvatura geodetica sull'arco è

$$-m_r(\alpha_3)\sigma(\alpha_1) = \sigma(\alpha_1) \left( m_r(\alpha_1) - \frac{\pi}{2} \right) + \sigma(\alpha_2) \left( m_r(\alpha_2) - \frac{\pi}{2} \right) .$$

Se invece  $F = E$ , l'integrale della curvatura geodetica è

$$\sigma(\alpha_1) \left( 2\pi + \frac{\pi}{3} \right) = \sigma(\alpha_1) \left( m_r(\alpha_1) - \frac{\pi}{2} \right) + \sigma(\alpha_2) \left( m_r(\alpha_2) - \frac{\pi}{2} \right) ,$$

essendo  $m_r(\alpha_1) = m_r(\alpha_2) = 5/3\pi$ . Se invece  $F$  ha un solo vertice in  $W$ , l'angolo di  $F$  corrispondente all'arco è l'angolo del primo tipo  $\alpha$  che ha tale vertice, quindi l'integrale della curvatura geodetica sull'arco è pari a  $m_r(\alpha)\sigma(\alpha)$ . L'unione degli archi così costruiti dà un certo numero di curve di Jordan chiuse  $\gamma_i$ ; esiste allora un unico intorno  $S_W$  di  $\tau_W$  il cui bordo sia l'unione delle  $\gamma_i$ .

Che  $\tau_W$  sia un retratto di deformazione di  $S_W$  segue dal fatto (banale per opportune scelte degli archi) che  $\tau_W \cap F$  è un retratto di deformazione di  $S_W \cap F$  per ogni triangolo  $F$  di  $\tau_0$ .  $S_W$  soddisfa le ipotesi del teorema 1.58, usando le notazioni del cui enunciato, per quanto visto:

$$\sum_{i=1}^n \int_{\gamma_i} k_i + \sum_{i=1}^{p_j} \theta_{ji} = \sum_{w \in W} \left( \sum_{\alpha \in A'_W(w)} \sigma(\alpha) m_r(\alpha) + \sum_{\alpha \in A''_W(w)} \sigma(\alpha) (m_r(\alpha) - \pi/2) \right)$$

da cui, sostituendo in 1.5, si ottiene l'equazione 1.6.

Per costruire  $W'$  si può procedere così: sia  $W_1, \dots, W_n$  una partizione di  $W$  tale

che  $S_{W_i}$  siano le componenti connesse di  $S_W$ . Poiché  $a, b$  e  $c$  sono vertici di un triangolo di  $\tau_0$ , esiste  $W_i$  tale che  $W \cap \{a, b, c\} = W_i \cap \{a, b, c\}$ . Se  $S_{W_i}$  ha due componenti di bordo, esiste un unico  $W' \supset W_i$  tale che  $S_{W'}$  sia l'unione degli interni delle due componenti di bordo, e si ha  $W' \neq V$  perché  $W_i \not\supset \{a, b, c\}$ ; altrimenti si può porre  $W' = W_i$ . In ogni caso,  $W'$  è contraibile e soddisfa la tesi.  $\square$

Sia

$$\Delta = \{r \in (0, +\infty)^V \mid \sum_{v \in V} r(v) = 1\};$$

è chiaro allora che la chiusura di  $\Delta$  in  $[0, +\infty]^V$  è data da

$$\bar{\Delta} = \{r \in [0, 1]^V \mid \sum_{v \in V} r(v) = 1\};$$

ed è compatta. Per il lemma 1.59, l'applicazione  $k$  può essere ristretta a un'applicazione  $k : \Delta \rightarrow Z$ , dove  $Z = \{x \in \mathbb{R}^V \mid \sum_{v \in V} x(v) = 0\}$ . Si osservi che  $\Delta$  e  $Z$  sono varietà di dimensione  $k + 2$ .

**Corollario 1.62.** *Se  $r, r' \in \Delta$  con  $r \neq r'$ ; sia  $W_1 = \{v \in V \mid r(v) > r'(v)\}$ . Se  $W_1$  non contiene  $\{a, b, c\}$  e  $W'_1$  è come nella proposizione 1.61, allora*

$$\sum_{w \in W'_1} k(r)(w) > \sum_{w \in W'_1} k(r')(w). \quad (1.7)$$

*Se  $W_2 = \{v \in V \mid r(v) < r'(v)\}$  non contiene  $\{a, b, c\}$ , e  $W'_2$  è come nella proposizione 1.61, allora*

$$\sum_{w \in W'_2} k(r)(w) < \sum_{w \in W'_2} k(r')(w). \quad (1.8)$$

*In particolare, la mappa  $k : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^V$  è un embedding.*

*Dimostrazione.*  $W_1, W_2 \neq \emptyset$  perché  $r \neq r'$ . Se  $W_1$  non contiene  $\{a, b, c\}$ , siano  $W'_1$  e  $S_{W'_1}$  come nella proposizione 1.61. Se  $w \in W'_1$  e  $\alpha \in A'_{W'_1}(w)$ ,  $m_r(\alpha) \leq m_{r'}(\alpha)$ , dove il segno di uguale vale soltanto se  $\alpha$  è un angolo di  $E$ , e quindi  $m_r(\alpha) = m_{r'}(\alpha) = 5/3\pi$ . Se  $\alpha \in A''_{W'_1}(w)$  e  $\beta$  ne è il coniugato,

$$m_r(\alpha) + m_r(\beta) \leq m_{r'}(\alpha) + m_{r'}(\beta),$$

dove il segno di uguale vale soltanto se  $\alpha$  e  $\beta$  sono due angoli di  $E$ , e quindi

$$m_r(\alpha) + m_r(\beta) = m_{r'}(\alpha) + m_{r'}(\beta) = \frac{10}{3}\pi.$$

Di conseguenza

$$\sum_{w \in W'_1} \sum_{\alpha \in A'_{W'_1}(w)} m_r(\alpha) \leq \sum_{w \in W'_1} \sum_{\alpha \in A'_{W'_1}(w)} m_{r'}(\alpha)$$

il segno di uguale vale solo se tutti gli  $\alpha$  sono angoli di  $E$ , e quindi  $S_{W'_1} \supset \{a, b, c\}$  che è assurdo. Applicando l'equazione 1.6, si ottiene 1.7.

Se  $W_2$  non interseca  $\{a, b, c\}$  si può procedere allo stesso modo, ottenendo 1.8. Poiché se  $W_1$  contiene  $\{a, b, c\}$  questa condizione è verificata,  $k$  è iniettiva; poiché è regolare, è un embedding.  $\square$

**Proposizione 1.63.** *Sia  $\{r_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  una successione in  $\Delta$  che converge in  $\overline{\Delta}$ , e sia  $W_0 = \{v \in V \mid r_n(v) \rightarrow 0\} \neq \emptyset$ . Allora esistono  $W' \subset V$  che dipende solo da  $W_0$  e una costante  $c_{W'} \geq \pi/3$  che dipende solo da  $W'$  tale che*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{w \in W'} k(r_n)(w) = c_{W'} .$$

Se  $\{a, b, c\}$  è contenuto in  $W_0$  oppure non lo interseca, si ha  $c_{W'} \geq \pi$ . Inoltre, esiste  $r \in \Delta$  tale che

$$\sum_{w \in W'} k(r)(w) < c_{W'} .$$

*Dimostrazione.* Se  $W_0$  interseca  $\{a, b, c\}$  in due punti, sia per definitezza

$$W_0 \cap \{a, b, c\} = \{b, c\} .$$

Sia  $W = V \setminus W_0$ , e sia  $W'$  come nella proposizione; si ha che  $\widehat{bac}$  è del primo tipo. Sia  $w \in W'$  e  $\alpha \in A'_{W'}(w)$ ; se  $\alpha = \widehat{bac}$ , allora  $m_{r_n}(\alpha) = 5/3\pi$ , altrimenti  $\lim_{n \rightarrow \infty} m_{r_n}(\alpha) = 0$ . Se invece  $\alpha \in A''_{W'}(w)$  e  $\beta$  ne è il coniugato,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (m_{r_n}(\alpha) + m_{r_n}(\beta) - \pi) = -\pi .$$

Sia  $2m$  la cardinalità dell'insieme  $\{\alpha \in A''_{W'}(w) \mid w \in W'\}$ . Applicando la formula 1.6 si trova che

$$\hat{c}_{W'} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{v \in W'} k(r_n)(v) = 2\pi\chi(S_{W'}) + m\pi - \frac{5}{3}\pi = \left(\frac{1}{3} + m\right)\pi ; \quad (1.9)$$

perché per la proposizione  $\chi(S_{W'}) = 1$ ; poiché  $m \geq 0$  dipende solo da  $W'$  si ottiene la prima parte della tesi.

Se  $W_0$  contiene  $\{a, b, c\}$  si può procedere allo stesso modo, con la differenza che l'angolo  $\widehat{bac}$  non compare nel termine destro di 1.6, quindi si ottiene

$$\hat{c}_{W'} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{v \in W'} k(r_n)(v) = 2\pi\chi(S_{W'}) + m\pi = (2 + m)\pi .$$

In entrambi i casi, si può prendere  $r_0 \in \mathbb{R}^{+V}$  tale che  $r_0(v) = \lim_{n \rightarrow +\infty} r_n(v)$  per  $v \in W$ , e  $r_0(w) = 1$  per  $w \in W_0$ . Normalizzando, si trova  $r \in \Delta$  tale che  $\{w \in V \mid r(w) < \lim r_n(v)\} = W$ ; per il corollario 1.62,  $\sum_{w \in W'} r(w) < c_{W'}$ .

Se invece  $W_0$  interseca  $\{a, b, c\}$  in un punto, che per definitezza si supporrà  $a$ ,

sia  $W'_0$  come nella proposizione. Anche in questo caso  $\widehat{bac}$  è del primo tipo. Sia  $w \in W'_0$  e  $\alpha \in A'_{W'_0}(w)$ ; se  $\alpha = \widehat{bac}$  allora  $m_{r_n}(\alpha) = 5/3\pi$ ; altrimenti

$$\lim_{n \rightarrow \infty} m_{r_n}(\alpha) = \pi .$$

Se invece  $\alpha \in A''_{W'_0}$  e  $\beta$  ne è il coniugato,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (m_{r_n}(\alpha) + m_{r_n}(\beta) - \pi) = 0 .$$

Sia  $m$  la cardinalità dell'insieme  $\{\alpha \in A'_{W'_0}(w) \mid w \in W'_0\}$ . Applicando la formula 1.6 si trova che

$$\hat{c} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{v \in W'_0} k(r_n)(v) = 2\pi\chi(S_{W'_0}) - m\pi - 2/3\pi$$

con  $\hat{c}$  che dipende solo da  $W'_0$ . Per la proposizione 1.61,  $\chi(S_{W'_0}) = 1$ . Non può essere  $m = 1$ ; infatti l'arco associato all'angolo  $\widehat{bac}$  deve essere completato a una curva chiusa con archi di  $\partial S_{W'_0}$ . Se tutti questi archi (eccetto quello già considerato) corrispondono ad angoli del secondo tipo, questo è impossibile. Quindi  $\hat{c} \leq -2/3\pi$ . Posto  $W' = V \setminus W'_0$ , per il lemma 1.59 si ha

$$c_{W'} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{w \in W'} k(r_n)(w) = -\hat{c} \geq 2/3\pi ,$$

con  $c_{W'}$  che dipende solo da  $W'$ .

Rimane da considerare il caso  $W_0 \cap \{a, b, c\} = \emptyset$ . Si può procedere come sopra, con la differenza che l'angolo  $\widehat{bac}$  non compare nel termine destro della formula 1.6, per cui si ottiene

$$c_{W'} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{v \in W'} k(r_n)(v) = 2\pi\chi(S_{W'}) - m\pi \quad (1.10)$$

Sia  $m'$  la cardinalità dell'insieme  $s = \{v \in V \setminus W'_0 \mid \exists w \text{ tale che } v \text{ è adiacente a } w \in W'_0\}$ . Se  $m' \leq 2$ , allora  $W'_0 = V \setminus s$  che è assurdo perché per costruzione  $W'_0 \subset V \setminus \{a, b, c\}$ . Allora  $m' > 2$  e quindi  $m = m' \geq 2$  perché in questo caso esiste una corrispondenza biunivoca tra gli insiemi che li definiscono; applicando la 1.10 si trova  $\hat{c} \leq -\pi$ . Procedendo come prima, si costruisce  $W'$  e si ha  $c_{W'} \geq \pi$ .

Negli ultimi due casi considerati, si può ancora prendere  $r_0 \in \mathbb{R}^{+V}$  tale che  $r_0(v) = \lim_{n \rightarrow +\infty} r_n(v)$  per  $v \in V \setminus W_0$ , e  $r_0(w) = 1$  per  $w \in W_0$ . Normalizzando, si trova  $r \in \Delta$  tale che  $\{w \in V \mid r(v) > \lim r_n(v)\} = W_0$ ; per il corollario 1.62,  $\sum_{w \in W'} r(w) > -c_{W'}$ .  $\square$

*Dimostrazione del teorema di Andreev.* Sia  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  una successione in  $k(\Delta) \subset Z$ . Per il corollario 1.62,  $\{k^{-1}(x_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$  è una successione in  $\Delta$  da cui si può estrarre una sottosuccessione convergente in  $\overline{\Delta}$  che sarà indicata con

$r_n$ ; inoltre se  $x_n$  tende a un punto  $x_\infty \in \partial k(\Delta)$ ,  $r_n$  tende a un punto  $r_\infty \in \partial \Delta$  perché  $k$  è aperta (infatti per il corollario 1.62 è un embedding di  $\Delta$  in  $Z$ , che ha la sua stessa dimensione). Per la proposizione 1.63,  $\sum_{w \in W} x_\infty(w) = c_W \geq \pi/3$  per qualche sottoinsieme  $W$  di  $V$ . Quindi il bordo di  $k(\Delta)$  in  $Z$  è contenuto in

$$\bigcup_W \left\{ x \in Z \mid \sum_{w \in W} x(w) = c_W \right\}, \quad (1.11)$$

dove  $W$  varia tra i sottoinsiemi non vuoti di  $V$  che non contengono  $\{a, b, c\}$  e tali che  $S_W$  è contrattile. L'insieme definito in 1.11 è il bordo di un aperto convesso  $A$  che contiene 0, e per la proposizione 1.63  $k(\Delta)$  contiene punti che stanno dalla stessa parte di 0 rispetto a  $\partial A$ . Quindi  $k(\Delta) = A \ni 0$ ; a partire da  $k^{-1}(0)$  si può costruire un impilamento  $\mathcal{I}$  di  $S^2$  la cui triangolazione è isomorfa a  $\tau_0$ . L'unicità segue dal corollario 1.62, e dal fatto che  $k(\lambda r) = k(r)$  per ogni  $\lambda \in \mathbb{R}^+$ .

Si è visto che da ogni  $r$  si costruisce un impilamento di  $S^2$  e viceversa; tuttavia, c'è un'indeterminatezza nella scelta del punto all'infinito. Dato un impilamento di  $S^2$  si può sempre scegliere il punto all'infinito in modo che la proiezione stereografica mandi  $a, b$  e  $c$  in tre punti fissati. Quindi si può supporre che  $E$  sia l'esterno di un triangolo equilatero di lato 2; in altri termini, se esiste  $r \in \Delta$  tale che  $k(r) \equiv 0$  allora si può supporre  $r(a) = r(b) = r(c) = 1$ . Restringersi a considerare configurazioni di questo tipo non avrebbe semplificato la dimostrazione del teorema di Andreev, dove è essenziale il fatto che  $\Delta$  e  $Z$  abbiano la stessa dimensione, ma nello studio dell'algoritmo dà una stima migliore sui  $c_W$  (proposizione 1.63), oltre che semplificare la notazione.

**Lemma 1.64.** *Se  $r \in \Delta$  e  $v \in V \setminus \{a, b, c\}$ , allora*

$$\frac{\partial k(r)(v)}{\partial r(v)} > 0.$$

*Dimostrazione.* Siano  $u, w \in V$  tali che  $u, w$  e  $v$  sono i vertici di un triangolo di  $\tau$ . Si ha

$$(r(u) + r(v))^2 + (r(w) + r(v))^2 - 2(r(w) + r(v))(r(u) + r(v)) \cos m_r(\widehat{uvw}) = (r(u) + r(w))^2$$

Derivando rispetto a  $r(v)$  si ottiene

$$\frac{\partial m_r(\widehat{uvw})}{\partial r(v)} = - \frac{\tan(m_r(\widehat{uvw}/2))(r(u) + r(w) + 2r(v))}{(r(u) + r(v))(r(w) + r(v))} < 0$$

e poiché  $\frac{\partial k(r)(v)}{\partial r(v)}$  è l'opposto della somma di  $l_v$  termini di questo tipo si ha la tesi.  $\square$

Se  $n \equiv r \pmod k$ , si pone  $v_n = v_r$ . Per  $v \in V \setminus \{a, b, c\}$ , se si fissa  $r(w)$  per  $w \in V$ ,  $w \neq v$ , allora per il lemma 1.64  $k(r)(v)$  è una funzione crescente di  $r(v)$ ;

inoltre  $\lim_{r(v) \rightarrow +\infty} k(r)(v) = 2\pi$ , e  $\lim_{r(v) \rightarrow 0} k(r)(v) = (2 - l_v)\pi < 0$ . Quindi esiste un solo modo di definire  $N_v : (\mathbb{R}^+)^V \rightarrow (\mathbb{R}^+)^V$  tale che  $N_v(r)(w) = r(w)$  per  $w \neq v$ ,  $k(N_v(r))(v) = 0$ . Si osservi anche che  $k(r)(v')$  è una funzione decrescente di  $r(v)$  se  $v'$  è adiacente a  $v$  e  $r(w)$  è fissato per  $w \neq v$ . Per il teorema delle funzioni implicite,  $N_v$  è  $\mathcal{C}^\infty$ .

Sia  $\Gamma = \{r \in \Delta \mid r(a) = r(b) = r(c)\}$ . L'algoritmo  $N_v$  ha il difetto di non dare limitazioni sui raggi, nè inferiori nè superiori; tuttavia, poiché l'applicazione

$$Q : \{r \in (0, +\infty)^V \mid r(a) = r(b) = r(c) = 1\} \rightarrow \Gamma$$

data da  $Q(r)(v) = r(v) / (\sum_{w \in V} r(w))$  è un diffeomorfismo che preserva la curvatura, è del tutto equivalente studiare l'algoritmo  $T_v : \Gamma \rightarrow \Gamma$  dato da  $T_v = Q \circ N_v$ , che invece dà una limitazione superiore sui raggi. Sia poi  $T_0$  l'identità, e per  $n \geq 1$  sia  $T_n = T_{v_n} \circ T_{n-1}$ .

Per  $x \in \mathbb{R}^V$ , sia  $\|x\| = \sum_{v \in V} |k(x)(v)|$ . Per il lemma 1.59,  $\|k(T_n(r))\|$  è non crescente in  $n$ .

**Lemma 1.65.** *Sia  $r_n$  una successione in  $(0, +\infty)^V$  tale che*

- $r_n(v) = r_{n+1}(v)$  se  $v$  non è adiacente a  $v_n$ , e  $v \neq v_n$ , per ogni  $n$ ;
- $\sum_{v \in V} k(r_n)(v) = 0$  per ogni  $n$ ;
- $k(r_{n+1})(v_n) = 0$  per ogni  $n$ ;
- $k(r_{n+1})(v) - k(r_n)(v)$  ha lo stesso segno<sup>2</sup> di  $k(r_n)(v_n)$  se  $v$  è adiacente a  $v_n$ , per ogni  $n$ .

Allora per ogni sua sottosuccessione  $r_{n_j}$ ,  $\|k(r_{n_j})\|$  è non crescente, ed è costante se e solo se  $k(r_1) \equiv 0$ .

*Nota.* Se  $r \in \Delta$ ,  $\{T_n(r)\}_{n \in \mathbb{N}}$  è una successione di questo tipo. Se invece  $r_i$  è una successione in  $\Delta$  che converge a  $r_\infty \in \partial\Delta$ , allora  $\lim_{i \rightarrow \infty} \{T_n(r_i)\}$ , se esiste, non verifica l'ultima condizione.

*Dimostrazione.* Se  $w_1, \dots, w_{l_v}$  sono i vertici adiacenti a  $v = v_n \in V$ , e

$$k(r_{n+1})(w_i) = k(r_n)(w_i) + \delta_i,$$

allora

$$\sum_{i=1}^{l_v} k(r_n)(w_i) + k(r_n)(v) = \sum_{i=1}^{l_v} (k(r_n)(w_i) + \delta_i) \implies k(r_n)(v) = \sum_{i=1}^{l_v} \delta_i. \quad (1.12)$$

<sup>2</sup>Qui e nel seguito si intende che  $a, b \in \mathbb{R}$  hanno lo stesso segno se  $a > 0 \iff b > 0$  e  $a < 0 \iff b < 0$ .

$\|k(r_n)\|$  è non crescente perché  $\sum_{v \in V} k(r_n)(v)$  è costante. Se  $\|k(r_n)\|$  è costante, poiché le curvatures degli altri vertici non variano,

$$\sum_{i=1}^{l_v} |k(r_n)(w_i)| + |k(r_n)(v)| = \sum_{i=1}^{l_v} |k(r_n)(w_i) + \delta_i|$$

quindi per l'equazione 1.12  $k(r_n)(w_i) > 0$  implica  $\delta_i \geq 0$ , mentre  $k(r_n)(v) > 0$  implica  $\delta_i > 0$  e quindi  $k(r_{n+1})(w_i) > 0$ . Quindi se  $k(r_n)(w) > 0$ ,  $w \neq v$  implica  $k(r_{n+1})(w) > 0$ ; d'altra parte, se  $k(r_n)(v) > 0$ ,  $k(r_{n+1})(w) > 0$  per ogni  $w$  adiacente a  $v = v_n$ . Allo stesso modo  $k(r_n)(w) < 0$ ,  $w \neq v$  implica  $k(r_{n+1})(w) < 0$  e  $k(r_n)(v) < 0$  implica  $k(r_{n+1})(w) < 0$  per ogni  $w$  adiacente a  $v = v_n$ . Se fosse  $k(r_1) \neq 0$ ,  $\|k(r_n)\|$  sarebbe una costante non nulla, e quindi per ogni  $n$  dovrebbero esistere due vertici  $v'_n$  e  $v''_n$  con curvatures di segno opposto; sia  $d_n$  la minima distanza tra due tali vertici per  $n$  fissato, nel senso della definizione 1.32, e  $d = \min d_n$ . È chiaro che non può essere  $d = 1$ . Per  $n$  sufficientemente grande,  $d_n = d$ ; si possono quindi scegliere  $v_i, v_j \in V$  tali che  $k(r_n)(v_i) > 0$ ,  $k(r_n)(v_j) < 0$ , e la distanza tra  $v_i$  e  $v_j$  sia pari a  $d$ . Sia

$$m_0 = \min\{m \mid m \geq n, m \equiv i \text{ o } m \equiv j \pmod{k}\}.$$

Per  $n \leq m \leq m_0$  vale ancora  $k(r_m)(v_i) > 0$ ,  $k(r_m)(v_j) < 0$ . Se  $m_0 \equiv i \pmod{k}$ , si può scegliere un vertice  $w$  adiacente a  $v_i$  che abbia distanza minore di  $v_i$  da  $v_j$ ; si ha  $k(r_{m_0+1})(w) > 0$ , mentre  $k(r_{m_0+1})(v_j) < 0$  perché  $d > 1$ . Quindi  $d_{m_0+1} < d_n = d$  che è assurdo. Analogamente, se  $m_0 \equiv j \pmod{k}$ , si può scegliere  $w$  adiacente a  $v_j$  che abbia distanza minore di  $v_j$  da  $v_i$ , e si ottiene un assurdo.  $\square$

**Teorema 1.66.** *Se  $r \in \Gamma$ ,  $\|k(r)\| \leq \pi$  esiste*

$$r_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} T_n(r),$$

e  $k(r_0) \equiv 0$ .

*Dimostrazione.* Sia  $T = T_k \circ \dots \circ T_1$ , così che  $T^n = (T_k \circ \dots \circ T_1)^n$ ;  $T$  è  $\mathcal{C}^\infty$ . Dalla successione  $T^n(r)$  si può estrarre una sottosuccessione convergente a  $r_\infty \in \bar{\Gamma}$ . Si osservi che poiché la norma è continua e non crescente,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|k(T_n(r))\| = \|k(r_\infty)\|. \quad (1.13)$$

Per il lemma 1.65, si ha  $\|k(r_\infty)\| < \pi$  e quindi  $r_\infty \in \Gamma$ . Poiché per definizione di  $\Gamma$ ,  $r_\infty(a) = r_\infty(b) = r_\infty(c)$ , se fosse  $W = \{v \in V \mid r_\infty(v) = 0\} \neq \emptyset$  allora per la proposizione 1.63

$$\|k(r_\infty)\| \geq \sum_{w \in W'} k(r_\infty)(w) = c_{W'} \geq \pi$$

che è assurdo. Se fosse  $\|k(r_\infty)\| = A > 0$ , per il lemma 1.65,  $\|k(T^m(r_\infty))\| < A$  per  $m \gg 1$ . Allora

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \|k(T^n(r))\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|k(T^m(T^n(r)))\| = \|k(T^m(r_\infty))\| < A$$

che è assurdo. Quindi  $k(r_\infty) \equiv 0$ , e per il corollario 1.62,  $r_\infty$  è l'unico  $r$  per cui  $k(r) \equiv 0$ . Per la 1.13, si ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|k(T_n(r))\| \rightarrow 0,$$

quindi  $k(T_n(r))$  tende a 0 e poiché  $k$  è un embedding  $T_n(r)$  tende a  $r_\infty$ .  $\square$

A questo punto ci si può chiedere se il teorema 1.66 vale per ogni  $r$ . In effetti, la limitazione ha un che di artificioso, perché se è vero che la stima su  $\|k(r)\|$  garantisce la limitatezza degli  $r(v)$ , non è difficile fornire esempi di triangolazioni per cui anche con  $r \equiv 1$  si ottiene  $\|k(r)\| > \pi$  (ad esempio quella ottenuta con la costruzione completata nella proposizione 1.35, applicata al dominio rappresentato in figura 1.3.2). Converrebbe forse cambiare tecnica: invece di cercare di escludere le configurazioni degeneri  $r = \lim r_n$ , per le quali  $T_v(r)$  a priori non è nemmeno definito, porre  $T_v(r) = \lim T_v(r_{n_k})$  per qualche scelta della sottosuccessione  $r_{n_k}$  (cosa sempre possibile per la compattezza di  $\bar{\Gamma}$ ). La non unicità della definizione non rappresenta un problema, perché tutto ciò che si deve dimostrare è che per  $n$  sufficientemente grande  $\|k(T_n(r))\| < \|k(r)\|$ , e per continuità  $\|k(T_v(r))\| \leq \|k(r)\|$ . La difficoltà di questa strada sta quindi nell'ottenere una condizione analoga alla quarta ipotesi del lemma 1.65, almeno per un'opportuna sottosuccessione, che permetta di dimostrare un risultato analogo al lemma stesso.

## Capitolo 2

# Una dimostrazione analitica

In questo capitolo si dimostrano il teorema di uniformizzazione e alcune applicazioni, seguendo [3]. Il teorema 1.12 segue dalla dimostrazione qui proposta come una conseguenza, anche se si vedrà che questa stessa dimostrazione verrebbe leggermente semplificata se se ne facesse uso (si veda la nota a pagina 48). Questa dimostrazione passa attraverso la costruzione di funzioni armoniche con una singolarità; le costruzioni usano il teorema di Perron per le funzioni subarmoniche. La natura delle funzioni armoniche con singolarità che si riesce a costruire dipende, nel caso semplicemente connesso, dall'esistenza di funzioni armoniche positive; si introdurrà quindi una classificazione delle superfici di Riemann in base a questa.

**Definizione 2.1.** *Si dirà che una funzione  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  è subarmonica se è continua e per ogni  $D \subset M$  aperto connesso,  $u : D \rightarrow \mathbb{R}$  armonica con  $f|_D \leq u$ ,  $u(x) = f(x)$  per qualche  $x \in D$ , vale  $u \equiv f|_D$ ; si dice superarmonica se  $-f$  è subarmonica.*

Poiché la condizione della definizione si può anche scrivere  $f + (-u) \leq 0$ , una funzione  $f \in \mathcal{C}(M, \mathbb{R})$  è subarmonica se e solo se per ogni  $D \subset M$  aperto connesso e ogni  $u : D \rightarrow \mathbb{R}$  armonica,  $f + u$  soddisfa il principio del massimo. È chiaro poi che le funzioni armoniche sono subarmoniche e superarmoniche.

### 2.1 Funzioni armoniche

Questo paragrafo contiene alcuni risultati preliminari sulle funzioni armoniche, tra cui il teorema di Harnack che permetterà nel paragrafo successivo di dimostrare il teorema di Perron.

Il *problema di Dirichlet* per un aperto  $D$  e una funzione continua  $f : \partial D \rightarrow \mathbb{R}$  consiste nel cercare una funzione continua su  $\overline{D}$  che estenda  $f$  e che sia armonica in  $D$ . Se per  $D$  vale il principio del massimo (per esempio per  $D$  relativamente

compatto in  $M$ ) il problema di Dirichlet ammette al più una soluzione. Vale il seguente

**Teorema 2.2.** *Il problema di Dirichlet per  $D^2$  ammette un'unica soluzione, che ha la forma:*

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) \operatorname{Re} \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} d\theta \quad (2.1)$$

Per  $M$  superficie di Riemann, sia  $\mathcal{C}(M)$  lo spazio delle funzioni continue da  $M$  in  $\mathbb{R}$ . Le seminorme  $P_K$ , dove  $P_K(f) = \sup_K |f|$  e  $K$  varia tra i sottoinsiemi relativamente compatti di  $M$ , inducono su di esso una struttura di spazio di Fréchet.

**Corollario 2.3.** *Se  $\{u_n\}$  è una successione di funzioni armoniche convergente in  $\mathcal{C}(M)$ , il limite è una funzione armonica.*

*Dimostrazione.* Sia  $K$  un disco conforme,  $u = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n$ ; allora  $u - u^{(K)}$  soddisfa 1.1, quindi vale il principio del massimo, dunque  $u = u^{(K)}$  su  $K$ .  $\square$

**Corollario 2.4 (Disuguaglianza di Harnack).** *Sia  $r < 1$ ; allora esistono  $c_1, c_2 > 0$  tali che se  $u \in \mathcal{C}(D^2)$ ,  $u$  è armonica in  $D^2$  e  $u > 0$ , allora  $c_1 \leq \frac{u(z)}{u(w)} \leq c_2$  per ogni  $z, w \in B(0, r)$ .*

*Dimostrazione.* Per il principio del massimo e quello del minimo,

$$\max_{z, w \in B(0, r)} \frac{u(z)}{u(w)} = \max_{z, w \in \partial B(0, r)} \frac{u(z)}{u(w)}$$

e lo stesso vale per il minimo. Vale poi:

$$\frac{1 - |z|}{1 + |z|} \leq \operatorname{Re} \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} \leq \frac{1 + |z|}{1 - |z|} \quad \forall z \in D^2, \theta \in \mathbb{R}$$

per cui la 2.1 dà

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1-r}{1+r} u(re^{i\theta}) d\theta \leq u(z) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1+r}{1-r} u(re^{i\theta}) d\theta \quad \forall z \in \partial B(0, r)$$

e usando 1.1

$$\frac{1-r}{1+r} u(0) \leq u(z) \leq \frac{1+r}{1-r} u(0) \quad \forall z \in \partial B(0, r)$$

da cui la tesi con

$$c_1 = \frac{(1-r)^2}{(1+r)^2}, \quad c_2 = \frac{(1+r)^2}{(1-r)^2} \quad \square$$

**Proposizione 2.5 (Teorema di Harnack).** *Sia  $\{u_n\}$  una successione crescente di funzioni armoniche in  $M$ . Allora  $u_n$  converge in  $\mathcal{C}(M)$  a una funzione armonica oppure converge uniformemente sui compatti a  $+\infty$ .*

*Dimostrazione.* Sia  $u : D \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  la funzione definita da

$$u(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z) .$$

Sia  $z_0 \in D$  con  $u(z_0) \neq +\infty$ ; sia  $\phi : (D^2, 0) \rightarrow (K, z_0)$  un disco conforme,  $K \subset D$ . Dato  $\epsilon > 0$ ,  $u_n(z_0) - u_m(z_0) < \epsilon$  per ogni  $n \geq m \gg 1$ . Sia  $r < 1$ ; per la disuguaglianza di Harnack applicata ad  $u_n - u_m$ ,

$$0 \leq u_n(z) - u_m(z) < c_2 \epsilon \forall z \in \phi(B(0, r))$$

Dunque  $u_n$  è di Cauchy in  $\mathcal{C}(\phi(B(0, r)))$ , per cui converge. Basta vedere che  $u \neq +\infty$ . Sia  $z_0 \in u^{-1}(+\infty)$ ; sia  $\phi : (D^2, 0) \rightarrow (K, z_0)$  un disco conforme,  $K \subset D$ . Dato  $N \in \mathbb{R}$ ,  $u_n(z_0) > N$  per ogni  $n \gg 1$ . Sia  $r < 1$ ; per la disuguaglianza di Harnack,  $u_n(z) > c_1 N \forall z \in \phi(B(0, r))$ . Dunque  $u_n$  converge uniformemente a  $+\infty$  in  $\phi(B(0, r))$ ; inoltre,  $u^{-1}(+\infty)$  è aperto; per quanto visto sopra, anche il complementare è aperto, e questo completa la dimostrazione.  $\square$

**Teorema 2.6.** *Sia  $M$  una superficie di Riemann semplicemente connessa,  $\sigma \subset M$  discreto,  $u : M \setminus \sigma \rightarrow \mathbb{R}$  armonica. Se esistono un ricoprimento  $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$  e funzioni meromorfe  $f_\alpha : U_\alpha \rightarrow S^2$  tali che  $u \equiv \operatorname{Re} f_\alpha$  (o  $u \equiv \log |f_\alpha|$ ) su  $U_\alpha \setminus \sigma$ , allora esiste una  $f : M \rightarrow S^2$  meromorfa tale che  $u \equiv \operatorname{Re} f$  (rispettivamente,  $u \equiv \log |f|$ ) su tutto  $M \setminus \sigma$ .*

*Osservazione.* Il lemma 1.6 implica immediatamente la tesi per  $\sigma = \emptyset$ . D'altra parte in generale non è detto che  $M \setminus \sigma$  sia semplicemente connessa, né che le  $u$  e  $v$  del lemma non abbiano singolarità essenziali.

*Dimostrazione.* Fissato un punto  $x \in M$ , per ogni  $y \in M$  diverso da  $x$  esiste un cammino formale  $\{U_{\alpha_1}, \dots, U_{\alpha_n}\}$  con  $x \in U_{\alpha_1}$ ,  $y \in U_{\alpha_n}$ . A meno di restringere gli  $U_{\alpha_i}$ , si può supporre che  $U_{\alpha_i} \cap U_{\alpha_j}$  sia l'insieme vuoto per  $|i - j| > 1$ , connesso altrimenti, e che, presine comunque tre, essi abbiano intersezione vuota. Si può supporre che ogni  $f_{\alpha_i}$  coincida in un punto non in  $\sigma$  con  $f_{\alpha_{i-1}}$  per  $i > 0$ ; quindi per il lemma 1.6 le  $f_{\alpha_i}$  si possono incollare. Sia  $f(y) = f_{\alpha_n}(y)$ ; basta vedere che  $f(y)$  non dipende dal cammino formale scelto. La componente connessa del germe di  $f_{\alpha_1}$  nel fascio delle funzioni meromorfe di  $M$  riveste  $M$ , e il germe di  $f_{\alpha_n}$  è il punto terminale del sollevamento di un cammino in  $M \setminus \sigma$  corrispondente al cammino formale; per il teorema di monodromia, essendo  $M$  semplicemente connessa, si ha che  $f_{\alpha_n}(y)$  non dipende dal cammino.  $\square$

**Definizione 2.7.** *Se  $D$  è un aperto di  $\mathbb{C}$ , sullo spazio vettoriale  $A^1(D)$  si definisce la topologia data dalle seminorme  $\{P_K \mid K \subset D \text{ compatto}\}$ , dove*

$$P_K(fdx + gdy) = \max\{\max_K |f|, \max_K |g|\}$$

**Proposizione 2.8.** *Sia  $D$  come sopra; allora l'integrazione lungo un cammino fissato è un funzionale continuo, l'operatore  $*$  è continuo, e la moltiplicazione è una forma bilineare  $A^1(D) \times \mathcal{C}(D) \rightarrow A^1(D)$  continua. Inoltre se*

$\mathcal{F} = \{u : D \rightarrow \mathbb{R} \text{ armonica}\} \subset \mathcal{C}(D)$  con la topologia indotta, allora l'operatore  $d : \mathcal{F} \rightarrow A^1(D)$  è continuo.

*Dimostrazione.* La prima asserzione segue dal fatto che il cammino ha immagine compatta e lunghezza finita; la seconda è ovvia; la terza segue da  $P_K(f\omega) \leq P_K(f)P_K(\omega)$ . Per verificare la quarta, basta vedere che  $\mathcal{F} \ni u \rightarrow 0$  implica  $du \rightarrow 0$ . Sia  $K \subset D$  compatto; allora esiste un compatto  $K'$  con  $K \subset \overset{\circ}{K}' \subset D$ ; sia  $z \in K$ , e  $\delta > 0$  la distanza tra  $K$  e  $\partial K'$ . Derivando l'equazione 1.1 si ottiene:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial u}{\partial x}(z + \rho e^{i\theta}) d\theta, \quad 0 < \rho < \delta$$

Moltiplicando per  $\rho$  e integrando in  $d\rho$  da 0 a  $\delta$  si ottiene:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x}(z) &= \frac{1}{\delta^2\pi} \int_{B(z,\delta)} \frac{\partial u}{\partial x} dx \wedge dy = \\ &= \frac{1}{\delta^2\pi} \int_{-\delta}^{\delta} \left( u(z + iy + \sqrt{\delta^2 - y^2}) - u(z + iy - \sqrt{\delta^2 - y^2}) \right) dy \end{aligned}$$

per cui

$$\left| \frac{\partial u}{\partial x}(z) \right| \leq \frac{2}{\delta^2\pi} \sup_{B(z,\delta)} |u| \leq \frac{2}{\delta^2\pi} \sup_{K'} |u|$$

e una formula analoga vale per  $\frac{\partial u}{\partial y}$ , quindi  $u \rightarrow 0$  in  $\mathcal{F}$  implica  $u \rightarrow 0$  uniformemente in  $K'$  che implica  $du \rightarrow 0$  in  $K$ .  $\square$

**Corollario 2.9.** *Sia  $M$  superficie di Riemann a base numerabile; un insieme  $\mathcal{F} \subset \mathcal{C}(M)$  di funzioni armoniche su  $M$  è relativamente compatto se e solo se è equilimitato sui compatti.*

*Dimostrazione.* Basta vedere che è equicontinuo; poi si procede come in 1.18. Fissati  $x_0 \in M$  ed  $\epsilon$ , sia  $\phi : (D^2, 0) \rightarrow (K, x_0)$  un disco conforme. Se  $f \in \mathcal{F}$ , per la proposizione 2.8, essendo  $\phi^* f$  limitata su  $\overline{D^2}$ , anche  $P_{\overline{D^2}}(df)$  è qui limitato da qualche costante  $C$ . Vale allora:

$$\forall y \in B\left(0, \frac{\epsilon}{C}\right), \quad f(\phi(y)) - f(x_0) = \int_0^y \phi^* df$$

lungo qualche cammino, che si può prendere di lunghezza minore di  $\epsilon/C$ , perciò

$$|f(\phi(y)) - f(x_0)| \leq \frac{\epsilon}{C} C = \epsilon \quad \square$$

**Proposizione 2.10.** *Se  $u, v \in \mathcal{C}^2(M)$ ,  $D \subset M$  è una sottosuperficie a bordo compatta, allora*

$$\int_{\partial D} u^* dv = \int_D du \wedge^* dv + \int_D u \Delta v \quad (2.2)$$

*Dimostrazione.* Si applicano la formula di Stokes e la definizione 1.3.  $\square$

**Proposizione 2.11.** *Se  $u, v \in \mathcal{C}^2(M)$ ,  $D \subset M$  è una sottosuperficie a bordo compatta, allora*

$$\int_{\partial D} (u^* dv - v^* du) = \int_D (u \Delta v - v \Delta u) \quad (2.3)$$

*Dimostrazione.* Si sottrae a 2.2 la stessa equazione con  $u$  e  $v$  scambiati; resta da vedere che  $du \wedge^* dv = dv \wedge^* du$ . In generale, siano  $\alpha, \beta \in A^1(M)$ ,  $(x; v, w) \in TM$ ; allora

$$\begin{aligned} \alpha \wedge^* \beta(x; v, w) &= \alpha(x; v) \beta(x; -iw) - \alpha(x; w) \beta(x; -iv) = \\ &= -\beta(x; iw) \alpha(x; v) + \beta(x; iv) \alpha(x; w) = \beta \wedge^* \alpha(x; iv, iw) = \beta \wedge^* \alpha(x; v, w) \end{aligned}$$

perché in coordinate locali  $i \frac{\partial}{\partial x} \wedge i \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \wedge -\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \wedge \frac{\partial}{\partial y}$ .  $\square$

## 2.2 Funzioni subarmoniche

In questo paragrafo si dimostra il principio di Perron e si dà una caratterizzazione dei domini per cui il problema di Dirichlet ammette soluzione per ogni condizione al bordo; il secondo risultato dipende dal primo, ed entrambi verranno usati nel seguito.

Per ogni  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  continua e ogni disco conforme  $K \subset M$ , in virtù del teorema 2.2 esiste una e una sola  $f^{(K)} : M \rightarrow \mathbb{R}$  continua che coincide con  $f$  fuori da  $K$  ed è armonica in  $K$ . L'operatore  $f \rightarrow f^{(K)}$  è  $\mathbb{R}$ -lineare. È data la seguente caratterizzazione:

**Proposizione 2.12.** *Una funzione  $f \in \mathcal{C}(M)$  è subarmonica (rispettivamente, superarmonica) se e solo se per ogni disco conforme  $K \subset M$  vale  $f \leq f^{(K)}$  (rispettivamente,  $f \geq f^{(K)}$ ).*

*Dimostrazione.* Se  $f$  è subarmonica,  $(f - f^{(K)})|_{\overline{K}}$  raggiunge il massimo sul bordo di  $K$ , dove è nulla, da cui la tesi. Viceversa, sia  $f \leq f^{(K)}$  per ogni  $K$  disco conforme. Sia  $U \subset M$  aperto,  $h : U \rightarrow \mathbb{R}$  armonica,  $H = \max_U f + h$ .  $(f + h)^{-1}(H)$  è chiuso; bisogna vedere che è aperto. Ogni  $x \in U$  ha un intorno del tipo

$$\bigcup_{0 \leq r < 1} \partial K_r$$

dove  $K_r \subset U$  sono dischi conformi (infatti se  $\phi : (D^2, 0) \rightarrow (K, x)$  è un disco conforme, si può prendere  $K_r = \phi(B(0, r))$ ). D'altra parte, se  $f(x) + h(x) = H$  allora

$$H = f(x) + h(x) \leq f^{(K_r)}(x) + h(x) \leq \max_{\partial K_r} (f^{(K_r)} + h) = \max_{\partial K_r} (f + h) \leq H$$

quindi  $f^{(K_r)} + h \equiv H$  in  $\overline{K_r}$ , in particolare  $f + h \equiv H$  in  $\partial K_r$  per ogni  $r$ , da cui la tesi.  $\square$

Come conseguenza, si ha che una funzione subarmonica e superarmonica  $f$  è armonica, perchè su un disco conforme  $K$  coincide con  $f^{(K)}$ .

**Corollario 2.13.** *Una funzione  $f \in \mathcal{C}(M)$  è subarmonica se e solo se per ogni disco conforme  $(K, \phi^{-1})$  vale*

$$\phi^* f(0) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \phi^* f(e^{i\theta}) d\theta$$

*Dimostrazione.* Dal teorema 2.2 si vede che  $\phi^* f^{(K)}(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \phi^* f(e^{i\theta}) d\theta$ .  $\square$

**Corollario 2.14.** *Sia  $D$  un aperto di  $M$ ,  $m \in \mathbb{R}$ ,  $f \in \mathcal{C}(\overline{D})$  subarmonica in  $D$ ,  $f \geq m$  in  $D$ ,  $f \equiv m$  su  $\partial D$ . Allora  $f$  si estende a una  $\tilde{f}$  subarmonica su  $M$ , con  $\tilde{f} = m$  su  $M \setminus D$ .*

*Dimostrazione.* Poichè la subarmonicità è una proprietà locale, la tesi segue dal fatto che  $\tilde{f}$  è subarmonica in  $M \setminus \overline{D}$ , dove è costante, e intorno a  $\partial D$ , in conseguenza del corollario.  $\square$

**Proposizione 2.15.** *Se  $u, v$  sono funzioni subarmoniche,  $u + v$  è subarmonica. Se poi  $K$  è un disco conforme,  $u^{(K)}$  è subarmonica. Se  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $\lambda > 0$ ,  $\lambda u$  è subarmonica. La funzione  $\max\{u, v\}$  definita da  $\max\{u, v\}(z) = \max\{u(z), v(z)\}$  è subarmonica.*

*Dimostrazione.*  $u + v$  e  $\lambda u$  sono subarmoniche per la linearità dell'operatore  $u \rightarrow u^{(K)}$ ; negli altri casi si usa il corollario 2.13. Vale:

$$\phi^* u(0) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \phi^* u(e^{i\theta}) d\theta \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \phi^* \max\{u, v\}(e^{i\theta}) d\theta$$

e analogamente

$$\phi^* v(0) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \phi^* \max\{u, v\}(e^{i\theta}) d\theta$$

per cui

$$\max\{u, v\}(\phi(0)) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \phi^* \max\{u, v\}(e^{i\theta}) d\theta,$$

quindi  $\max\{u, v\}$  è subarmonica.  $u^{(K)}$  è subarmonica in  $M \setminus \overline{K}$  perchè vi coincide con  $u$ ; è subarmonica in  $K$  perchè è armonica; se poi  $x \in \partial K$ ,  $\phi' : (D^2, 0) \rightarrow (K', x)$  è un disco conforme,

$$u^{(K)}(x) = u(x) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \phi'^* u(e^{i\theta}) d\theta \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \phi'^* u^{(K)}(e^{i\theta}) d\theta \quad \square$$

**Definizione 2.16.** *Sia  $\mathcal{F} \subset \mathcal{C}(M)$  una famiglia di funzioni subarmoniche. Si dice che  $\mathcal{F}$  è una famiglia di Perron se*

- $\mathcal{F} \neq \emptyset$

- $\forall u \in \mathcal{F}, K \subset M$  disco conforme,  $\exists v \in \mathcal{F}, v \geq u, v|_K$  armonica
- $\forall u, v \in \mathcal{F}, \exists w \in \mathcal{F}, w \geq \max\{u, v\}$

**Teorema 2.17 (Principio di Perron).** *Se  $\mathcal{F}$  è una famiglia di Perron e  $u : M \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$  è definita da  $u(P) = \sup_{v \in \mathcal{F}} v(P)$ , allora  $u$  è armonica oppure  $u \equiv +\infty$ . Se poi  $K \subset M$  è un disco conforme, esiste una successione in  $\mathcal{F}$  che converge uniformemente a  $u$  in  $K$ .*

*Dimostrazione.* Per prima cosa si dimostra la tesi per un disco conforme  $K$ . Sia  $\{z_j\}$  una successione di punti densi in  $K$ . Per ogni  $j$ , sia  $\{v_{jk}\}_{k \in \mathbb{N}}$  una successione in  $\mathcal{F}$  tale che

$$u(z_j) = \lim_{k \rightarrow \infty} v_{jk}(z_j)$$

Poiché  $\mathcal{F}$  è una famiglia di Perron, si può costruire una successione  $\{v_n\}$  in  $\mathcal{F}$  con queste proprietà:

- $v_n$  armonica in  $K$
- $v_{n+1} \geq v_n$
- $v_{n+1} \geq v_{ml} \forall m \leq n+1, l \leq n+1$

Allora  $v_n(z_j) \geq v_{jk}(z_j) \forall n \geq \max\{k, j\}$ , per cui

$$\lim_{n \rightarrow \infty} v_n(z_j) = \sup_{n \in \mathbb{N}} v_n(z_j) = u(z_j)$$

Sia per

$$W = \lim_{k \rightarrow \infty} v_k$$

Per la proposizione 2.5  $W$  è armonica in  $K$  oppure  $W \equiv +\infty$ . Poiché  $v_k \in \mathcal{F}$ ,  $v_k \leq u$ , per cui  $W \leq u$ . Inoltre, nel caso  $W < +\infty$ ,  $W = u$  su un insieme denso, quindi  $W \geq v$  su un insieme denso per ogni  $v \in \mathcal{F}$ , che è continua, quindi  $W \geq v$  per ogni  $v \in \mathcal{F}$ . Dunque  $W \geq u$  e di conseguenza  $W = u$ . Questo dimostra la seconda affermazione dell'enunciato per un disco conforme la cui chiusura è contenuta in  $K$ ; d'altra parte ogni disco conforme è di questo tipo.

In generale, sia  $x \in \overline{u^{-1}\{+\infty\}}$ ; in un intorno  $K \ni x$  deve essere  $u \equiv +\infty$ , quindi  $u^{-1}\{+\infty\}$  è aperto e chiuso. Allora se è vuoto,  $u$  è localmente armonica, quindi armonica; altrimenti  $u \equiv +\infty$ .  $\square$

**Definizione 2.18.** *Sia  $D \subset M$  aperto,  $P \in \partial D$ . Una barriera in  $P$  è una  $\beta \in \mathcal{C}(\overline{D \cap N})$ , con  $N \subset M$  intorno aperto di  $P$ , tale che*

- (B1)  $\beta$  è superarmonica in  $D \cap N$ .
- (B2)  $\beta(P) = 0$

**(B3)**  $\beta > 0$  in  $\overline{D \cap N} \setminus \{P\}$

Si dice che  $\beta$  è una barriera normalizzata se è una barriera definita in tutto  $\overline{D}$ , e  $\equiv 1$  fuori da un intorno di  $P$ .

Se  $P \in \partial D$ , e per una carta  $(U, \psi)$  con  $\psi(P) = 0$  è  $\psi(U \cap \overline{D}) \cap \mathbb{R}^- = \emptyset$ , (si dice in questo caso che  $P$  può essere raggiunta con un arco analitico in  $M \setminus \overline{D}$ ), allora esiste una barriera in  $P$ . Infatti su  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$  esiste una radice quadrata olomorfa (corollario 1.7), data da  $\sqrt{\rho e^{i\theta}} = \sqrt{\rho} e^{i\theta/2}$ . Sia  $\beta(x) = \operatorname{Re} \sqrt{\psi(x)}$ ; allora  $\beta$  soddisfa la definizione per  $N = U$ .

**Proposizione 2.19.** *Se  $D \subset M$  aperto,  $P \in \partial D$  ammette una barriera se e solo se ammette una barriera normalizzata.*

*Dimostrazione.* Se  $\beta$  è una barriera per  $P$  definita in  $\overline{N \cap D}$ , con  $N$  intorno relativamente compatto di  $P$ , e  $m = \min_{\partial N \cap \overline{D}} \beta > 0$ , sia  $\tilde{\beta} = \min\{\beta, m\}$ ; allora  $\tilde{\beta}$  è ancora una barriera, e per il corollario 2.14 si può estendere a una funzione superarmonica  $\equiv m$  su  $D \setminus N$ ; si può poi porre  $\tilde{\beta} \equiv m$  su  $\partial D \setminus N$ , e dividendo per  $m$ , si ottiene la barriera normalizzata.  $\square$

**Definizione 2.20.** *Fissato  $D \subset M$ , si dice che un punto  $P \in \partial D$  è un punto regolare (per il problema di Dirichlet) se esiste una barriera in  $P$ . Si dice che  $D$  è regolare (per il problema di Dirichlet) se ogni punto di  $\partial D$  è regolare. Si dice che una soluzione  $f : \overline{D} \rightarrow \mathbb{R}$  al problema di Dirichlet per qualche condizione al bordo è propria se*

$$\inf_D f = \inf_{\partial D} f, \quad \sup_D f = \sup_{\partial D} f$$

Nel seguito (2.37) servirà la seguente:

**Proposizione 2.21.** *L'intersezione di due regioni regolari è regolare. Se  $K \subset M$  è compatto, allora esiste  $D \supset K$  regolare.*

*Dimostrazione.* La prima affermazione segue dal fatto che la restrizione di una barriera è una barriera. Per dimostrare la seconda, si può ricoprire  $K$  con  $n$  dischi conformi  $K_1, \dots, K_n$ . Per  $i = 2, \dots, n$ , si ridefinisce  $K_i = \phi_i(B(0, 1 + \epsilon_i))$ , scegliendo  $\epsilon_i$  in modo che l'espressione abbia senso e che  $\partial K_i$  sia trasversale a  $\partial K_j$  per  $j < i$ . É chiaro che

$$D = \bigcup_{i=1}^n K_i \supset K$$

Sia ora  $x \in \partial D$ ; dev'essere  $x \in \partial K_i$  per qualche  $i$ . Per la trasversalità, esiste un segmento in  $\mathbb{C}$  con un estremo in  $x$  la cui immagine per  $\phi_i$  è un arco analitico che interseca  $\partial D$  solo in  $x$ .  $\square$

Il seguente lemma mostra l'importanza delle regioni regolari:

**Lemma 2.22.** *Se  $D \subset M$  è un aperto connesso regolare,  $f \in \mathcal{C}(\partial D)$  con  $0 \leq f \leq m$ ; posto*

$$\mathcal{F}_1 = \{v \in \mathcal{C}(\overline{D}) \mid v|_{\partial D} \leq f, 0 \leq v \leq m, v \text{ subarmonica in } D\}$$

$$\mathcal{F}_2 = \{v \in \mathcal{F}_1 \mid v \text{ a supporto compatto}\}$$

sia  $\mathcal{F}$  una famiglia di Perron in  $D$  con  $\mathcal{F}_2 \subset \mathcal{F} \subset \mathcal{F}_1$ ; allora si ha che  $u = \sup_{v|_D \in \mathcal{F}} u$  è armonica in  $D$ , e si estende a una funzione continua in  $\overline{D}$  con  $u|_{\partial D} = f$ .

*Dimostrazione.* È chiaro che  $0 \leq u \leq m$ ; per il principio di Perron,  $u$  è armonica in  $D$ . Bisogna dimostrare che  $\lim_{Q \rightarrow P} u(Q) = f(P)$  per  $P \in \partial D$ . Si verificherà dapprima che

$$\liminf_{Q \rightarrow P} u(Q) \geq f(P) \quad (2.4)$$

Se  $f(P) = 0$  non c'è nulla da dimostrare; altrimenti, sia  $\epsilon$  tale che  $f(P) > \epsilon > 0$ . Per qualche  $N$  intorno relativamente compatto di  $P$ , vale  $f > f(P) - \epsilon$  in  $N \cap \partial D$ . Sia  $\beta$  una barriera normalizzata in  $P$ , tale che  $\beta \equiv 1$  in  $\overline{D} \setminus N$ ; sia  $w = (f(P) - \epsilon)(1 - \beta)$ . È chiaro che

$$\liminf_{Q \rightarrow P} w(Q) = f(P) - \epsilon$$

Se si dimostra che  $w \in \mathcal{F}$ , si ottiene

$$\liminf_{Q \rightarrow P} u(Q) \geq f(P) - \epsilon \quad \forall \epsilon$$

da cui la 2.4. Ora, il supporto di  $w$  è contenuto in  $\overline{N}$ ; in particolare è compatto. In  $\overline{D}$ ,  $w \geq 0$  e  $w \leq f(P) - \epsilon < m$ ; inoltre, essendo  $f(P) - \epsilon > 0$ ,  $w$  è subarmonica per la proposizione 2.15. In  $\partial D \cap N$ ,  $w \leq f(P) - \epsilon \leq f$ ; in  $\partial D \setminus N$ ,  $w = 0 \leq f$ . Quindi  $w \in \mathcal{F}_2$ ; questo dimostra la 2.4.

Per concludere la dimostrazione del lemma, rimane da vedere che

$$\limsup_{Q \rightarrow P} u(Q) \leq f(P) \quad (2.5)$$

Se  $m = f(P)$  non c'è nulla da dimostrare; altrimenti, sia  $\epsilon > 0$  tale che  $f(P) + \epsilon < m$ . Per qualche  $N$  intorno relativamente compatto di  $P$ ,  $f < f(P) + \epsilon$  in  $N \cap \partial D$ . Sia  $\beta$  una barriera normalizzata in  $P$ , tale che  $\beta \equiv 1$  in  $\overline{D} \setminus N$ ; sia  $v \in \mathcal{F} \subset \mathcal{F}_1$ , e  $w = v + (f(P) + \epsilon - m)\beta$ . Se si dimostra che, per ogni  $v$ ,  $w \leq f(P) + \epsilon$  in  $N \cap D$ , si ottiene che in  $N \cap D$

$$v \leq f(P) + \epsilon + (m - f(P) - \epsilon)\beta \quad \forall v \in \mathcal{F}$$

quindi  $u \leq f(P) + \epsilon + (m - f(P) - \epsilon)\beta$  per ogni  $\epsilon > 0$ ; passando al limite si ottiene la 2.5. Ora, in  $\partial N \cap \overline{D}$  vale  $w = v + f(P) + \epsilon - m \leq f(P) + \epsilon$ , mentre in  $\partial D \cap \overline{N}$  vale  $w \leq v \leq f < f(P) + \epsilon$ . Poiché  $w$  è subarmonica, per la proposizione 2.15, e  $N$  è relativamente compatto,  $w < f(P) + \epsilon$  in  $(\partial N \cap \overline{D}) \cup (\partial D \cap \overline{N}) \supset \partial(N \cap D)$  implica  $w < f(P) + \epsilon$  in  $N \cap D$ .  $\square$

**Teorema 2.23.** *Se  $D \subset M$  aperto connesso, allora esiste una soluzione propria al problema di Dirichlet per ogni  $f \in \mathcal{C}(\partial D)$  se e solo se  $\partial D$  è regolare.*

*Dimostrazione.* Se per ogni  $f \in \mathcal{C}(\partial D)$  esiste una soluzione propria al problema di Dirichlet, in particolare si può prendere una  $f$  tale che  $f(P) = 0$ ,  $0 < f \leq 1$  in  $\partial D \setminus \{P\}$ , e ottenere  $u \in \mathcal{C}(\overline{D})$  armonica in  $D$ , con  $0 \leq u \leq 1$ ,  $u(P) = 0$ ,  $u|_{\partial D} \equiv f$ . Se fosse  $u(Q) = 0$ ,  $Q \in D$ , per il principio del massimo  $u \equiv 0$ , quindi  $f \equiv 0$  che è assurdo. Quindi  $u$  è una barriera in  $P$ .

Viceversa, sia  $\partial D$  regolare. Sia  $m_0 = \inf f$ ,  $m_1 = \sup f$ ; sia

$$\mathcal{F} = \{u \in \mathcal{C}(\overline{D}) \mid u \text{ subarmonica in } D, m_0 \leq u \leq m_1, u|_{\partial D} \leq f\}.$$

Applicando il lemma 2.22 alla famiglia  $\mathcal{F} - m_0$ , si ottiene la tesi. □

## 2.3 Classificazione

Come annunciato, è opportuno introdurre una classificazione delle superfici di Riemann semplicemente connesse.

**Definizione 2.24.** *Una superficie di Riemann semplicemente connessa  $M$  si dice iperbolica se esiste una funzione  $u : M \rightarrow \mathbb{R}$  armonica non costante, e  $u > 0$ .*

Per il principio del massimo, una superficie di Riemann iperbolica non può essere compatta; in particolare,  $S^2$  è non iperbolica. Se  $j : D^2 \rightarrow \mathbb{C}$  è l'inclusione,  $u = \operatorname{Re} j + 1$  soddisfa la definizione, per cui  $D^2$  è iperbolico.

**Proposizione 2.25.**  *$\mathbb{C}$  è non iperbolico.*

*Dimostrazione.* Sia  $u : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$  come nella definizione. Poiché  $\mathbb{C}$  è semplicemente connesso, per il lemma 1.6  $-u = \log |f|$ , dove  $f : \mathbb{C} \rightarrow D^2$  è olomorfa e non costante. Scrivendo  $f(z) = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$ , si vede che questo è assurdo. □

Quindi le superfici di Riemann semplicemente connesse si distinguono in tre categorie: quelle iperboliche, quelle compatte e quelle che non appartengono alle prime due categorie. La prima categoria contiene  $D^2$ , la seconda contiene  $S^2$ , la terza contiene  $\mathbb{C}$ . Per dimostrare il teorema di uniformizzazione bisogna dimostrare che ogni superficie di Riemann semplicemente connessa è biolomorfa al modello della categoria a cui appartiene.

## 2.4 Il caso iperbolico

In questo paragrafo, si dimostrerà che ogni superficie di Riemann semplicemente connessa iperbolica è biolomorfa al disco. Per farlo si useranno le funzioni di Green, per dimostrare l'esistenza delle quali si passerà attraverso la nozione di misura armonica (secondo la definizione di [3]). In effetti, quello che serve è l'esistenza della misura armonica per un sistema fondamentale di intorni di un punto: basterebbe per esempio dimostrarla per i dischi conformi; in questo modo

si avrebbe il vantaggio di non dover usare il teorema 2.23. D'altra parte, questo teorema verrà usato nel paragrafo 2.5, per cui la dimostrazione del teorema di uniformizzazione non ne risulterebbe semplificata o abbreviata.

In questo paragrafo, con  $M$  si indicherà una superficie di Riemann tale che esiste  $u : M \rightarrow \mathbb{R}$  subarmonica non costante,  $u < 0$ ; è chiaro che le superfici di Riemann semplicemente connesse iperboliche sono di questo tipo. Il motivo per considerare una classe di superfici più ampia del necessario è che da un lato le dimostrazioni non cambiano, e dall'altro questo permette di dimostrare l'esistenza di funzioni meromorfe, come si vedrà nel paragrafo 2.6.

**Definizione 2.26.** *Se  $K \subset M$  è un compatto tale che  $M \setminus K$  è regolare e connesso, si dice che  $\omega \in \mathcal{C}(\overline{M \setminus K})$  è la misura armonica di  $K$  se*

(MA1)  $\omega|_{M \setminus K}$  è armonica

(MA2)  $\omega = 1$  su  $\partial K$

(MA3)  $0 < \omega < 1$  su  $M \setminus K$

(MA4) per ogni  $\omega' \in \mathcal{C}(\overline{M \setminus K})$  che soddisfi **MA1**, **MA2**, **MA3**,  $\omega < \omega'$

**Teorema 2.27.** *Sia  $K \subset M$  compatto con  $M \setminus K$  regolare e connesso; allora esiste la misura armonica di  $K$ .*

*Dimostrazione.* Per ipotesi, esiste una  $\psi_0$  superarmonica positiva e non costante; sia

$$\psi = \min \left\{ \frac{\psi_0}{\min_K \psi_0}, 1 \right\}$$

Se fosse  $\psi_0 \geq \min_K \psi_0$  su  $M$ , vorrebbe dire che  $\psi_0$  ha un minimo in  $M$ , quindi sarebbe costante, che è assurdo. Di conseguenza, esiste  $Q \in M \setminus K$  tale che  $\psi(Q) < 1$ . Inoltre,  $\psi$  è superarmonica,  $0 < \psi \leq 1$ ,  $\psi|_K \equiv 1$ . Sia ora

$$\mathcal{F} = \{u \in \mathcal{C}(\overline{M \setminus K}) \mid u \text{ subarmonica in } M \setminus K \text{ a supporto compatto, } 0 \leq u \leq \psi|_{\overline{M \setminus K}}\}$$

Per la proposizione 2.15,  $u, v \in \mathcal{F} \implies \max\{u, v\} \in \mathcal{F}$ . Se  $K'$  è un disco conforme in  $M \setminus K$ ,  $u \in \mathcal{F} \implies u|_{\partial K'} \leq \psi|_{\partial K'} \implies u^{(K')} \leq \psi^{(K')} \leq \psi$  perché  $\psi$  è superarmonica, per cui  $u^{(K')} \in \mathcal{F}$ . Essendo poi  $0 \in \mathcal{F} \neq \emptyset$ , si ha che  $\mathcal{F}$  è una famiglia di Perron. Per poter applicare il lemma 2.22, con  $D = M \setminus K$ ,  $m = 1$  e  $f = \psi|_{\partial K} \equiv 1$ , occorre e basta dimostrare che una funzione subarmonica  $v \in \mathcal{C}(M \setminus \overset{\circ}{K})$  con supporto  $C$  compatto, con  $0 \leq v \leq 1$ , appartiene a  $\mathcal{F}$ . Data una tale funzione,  $v - \psi$  è una funzione subarmonica, con  $v - \psi \leq 0$  in  $\partial C$  (perché  $v \equiv 0$  in  $\partial C \setminus K$ , e  $\psi \equiv 1$  in  $C \cap \partial K$ ); quindi per il principio del massimo  $v \leq \psi$  in  $C$ ; d'altra parte,  $0 = v \leq \psi$  in  $M \setminus (K \cup C)$ , per cui  $v \in \mathcal{F}$ . Sia  $\omega = \sup_{u \in \mathcal{F}} u$ ; per il lemma 2.22  $\omega$  soddisfa **MA1** e si può estendere a una funzione continua in  $M \setminus K$  che soddisfa **MA2**. Essendo  $\omega(Q) \leq \psi(Q) < 1$ ,  $\omega$  non può essere costante in  $M \setminus K$ , e quindi non può avere massimo né minimo nell'aperto connesso  $M \setminus K$ ; quindi essendo  $\omega \geq 0$ ,  $\omega$  soddisfa **MA3**. Se poi

$\tilde{\omega} \in \mathcal{C}(M \setminus \overset{\circ}{K})$  soddisfa **MA1**, **MA2** e **MA3**, allora per ogni  $v \in \mathcal{F}$  con supporto  $C$ ,  $v - \tilde{\omega}$  è una funzione subarmonica  $\leq 0$  in  $\partial C$ , per cui per il principio del massimo  $v \leq \tilde{\omega} \forall v \in \mathcal{F}$  e quindi  $\omega \leq \tilde{\omega}$ . Quindi  $\omega_0$  è la misura armonica di  $K$ .  $\square$

**Definizione 2.28.** Fissato  $x \in M$ , si dice che  $f : M \setminus \{x\} \rightarrow \mathbb{C}$  è la funzione di Green per  $M$  in  $x$  se

(G1)  $f$  è armonica

(G2)  $f > 0$

(G3) per qualche (e dunque per ogni) parametrizzazione  $\phi : (D^2, 0) \rightarrow (U, x)$ ,  $\phi^* f + \log |z| : D^2 \setminus \{x\} \rightarrow \mathbb{C}$  si estende a una funzione armonica in  $D^2$

(G4) per ogni  $g : M \setminus \{x\} \rightarrow \mathbb{C}$  che soddisfi **G1**, **G2** e **G3** vale  $g \geq f$ .

Se valgono le ipotesi **G1** e **G2**,  $\phi^* f + \log |z|$  è armonica in  $D^2 \setminus \{0\}$ ; per il lemma 1.6 e per l'estendibilità delle funzioni olomorfe limitate, **G3** diventa equivalente a

$$\exists \lim_{z \rightarrow 0} f(\phi(z)) + \log |z| .$$

Questa condizione non dipende dalla parametrizzazione  $\phi$ : se  $\psi : (D^2, 0) \rightarrow (U, x)$  è un'altra parametrizzazione, vale:

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow 0} f(\phi(z)) + \log |z| &= \lim_{w \rightarrow 0} f(\psi(w)) + \log |\phi^{-1} \circ \psi(w)| = \\ &= \lim_{w \rightarrow 0} \left( f(\psi(w)) + \log |w| + \log \left| \frac{\phi^{-1} \circ \psi(w)}{w} \right| \right) = \\ &= \lim_{w \rightarrow 0} \left( f(\psi(w)) + \log |w| + \log \left| \frac{\partial(\phi^{-1} \circ \psi)}{\partial w}(0) \right| \right) \end{aligned}$$

che esiste se e solo se esiste  $\lim_{w \rightarrow 0} (f(\psi(w)) + \log |w|)$ .

**Teorema 2.29.** Per ogni  $x \in M$  esiste  $f$  funzione di Green per  $M$  in  $x$ .

*Dimostrazione.* Sia  $P \in M$ ,  $\phi : (D^2, 0) \rightarrow (K, P)$  un disco conforme. Per il corollario 2.14 la funzione  $v_0 : K \rightarrow \mathbb{R}$  data da  $v_0(P) = \log |\phi^{-1}(P)|$  si estende a una funzione subarmonica  $v_0 : M \rightarrow \mathbb{R}$  nulla fuori da  $K$ . Sia

$\mathcal{F} = \{u \in \mathcal{C}(M \setminus \{P\}) \mid u \geq 0, \text{ la chiusura in } M \text{ del supporto di } u \text{ è compatta, } u + v_0 \text{ si estende a una funzione subarmonica in } M\}$

$\mathcal{F}$  non è vuoto perchè contiene  $-v_0$ . Se  $u, v \in \mathcal{F}$ ,

$$\max\{u, v\} + v_0 = \max\{u + v_0, v + v_0\}$$

è subarmonica, quindi  $\max\{u, v\} \in \mathcal{F}$ . Se  $K'$  è un disco conforme in  $M \setminus \{P\}$ , per la definizione di disco conforme  $\overline{K'}$  deve avere un intorno semplicemente

connesso, quindi  $P \notin \overline{K'}$ , per cui  $u^{(K')} + v_0 = u + v_0$  intorno a  $P$  e quindi è subarmonica. Poiché poi  $u^{(K)} \geq u$ , e  $\overline{K'}$  è compatto, si ha  $u^{(K')} \in \mathcal{F}$ . In definitiva,  $\mathcal{F}$  è una famiglia di Perron.

Il prossimo passo consiste nel dimostrare che  $\mathcal{F}$  è equilimitato fuori da ogni intorno di  $P$ . Sia  $N = \phi(B(0, r))$ , con  $0 < r < 1$ , così che  $v_0|_{\partial N} \equiv v_N$  per qualche costante  $v_N < 0$ ; per il teorema 2.27 esiste la misura armonica  $\omega_N$  di  $N$  (in effetti non si userà **MA4**). Sia  $u \in \mathcal{F}$  con supporto  $S$ , e sia

$$u_N = \max_{z \in \partial N} u(z)$$

Sia  $v = u_N \omega_N - u$ ;  $v$  è superarmonica in  $M \setminus N$  per **MA1**, e  $v \geq 0$  su  $\partial N$  per **MA2**. Per la **MA3**,  $v \geq 0$  su  $\partial S$ . Per il principio del minimo,  $v \geq 0$  su  $S \setminus N$ ; inoltre  $v \geq 0$  su  $M \setminus S$ , per cui  $u \leq u_N \omega_N$  su  $M \setminus \overset{\circ}{N}$ . Sia

$$\lambda_N = \max_{z \in \partial K} \omega_N(z)$$

Per **MA3**,  $0 < \lambda_N < 1$ . Poiché  $u + v_0$  è subarmonica,  $u + v_0|_{\overline{K}}$  raggiunge il massimo su  $\partial K$ , quindi

$$u_N + v_N \leq \max_{z \in \partial N} u(z) + v_0(z) \leq \max_{z \in \partial K} u(z) + v_0(z) = \max_{z \in \partial K} u(z) \leq u_N \lambda_N$$

quindi  $u_N \leq \frac{v_N}{\lambda_N - 1}$ . D'altra parte,  $\frac{v_N}{\lambda_N - 1} > 0$  implica  $u < \frac{v_N}{\lambda_N - 1}$  su  $\partial S$  e su  $M \setminus S$ , per cui

$$u(z) \leq \frac{v_N}{\lambda_N - 1} \quad \forall z \in \overline{M \setminus N} \quad (2.6)$$

Sia ora  $g = \sup_{u \in \mathcal{F}} u$ ; per la 2.6 e il teorema 2.17  $g$  è armonica in  $M \setminus P$ . Poiché  $u \geq 0$  per ogni  $u \in \mathcal{F}$ , è  $g \geq 0$ . Per il principio del minimo,  $g$  non può annullarsi in alcun punto di  $M \setminus \{P\}$ , altrimenti sarebbe identicamente nulla, che è assurdo (ad esempio perché contraddice  $g \geq -v_0$ ). Per dimostrare **G3** basta vedere che  $g + v_0$  è limitata in  $N$ . Infatti  $\forall u \in \mathcal{F}$  il principio del massimo in  $N$  dà

$$u + v_0 \leq \max_{z \in \partial N} u(z) + v_0(z) \leq u_N + v_N \leq \frac{v_N}{\lambda_N - 1} + v_N = \frac{v_N \lambda_N}{\lambda_N - 1}$$

quindi  $g + v_0 \leq \frac{v_N \lambda_N}{\lambda_N - 1}$  in  $N$ . Per dimostrare **G4**, sia  $\hat{g} : M \setminus P \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione che soddisfi **G1**, **G2** e **G3**. Allora  $\hat{g} - u$  è superarmonica  $\forall u \in \mathcal{F}$ ; sia  $S$  il supporto di  $u$ . Poiché  $\hat{g} - u \geq 0$  in  $M \setminus S$  e  $S$  compatto, il principio del minimo dà  $\hat{g} \geq u$  per ogni  $u \in \mathcal{F}$ , per cui  $\hat{g} \geq g$ .  $\square$

**Lemma 2.30.** Per  $\alpha \in D^2$  sia  $\Phi_\alpha$  l'omografia definita da

$$\Phi_\alpha(z) = \frac{z - \alpha}{1 - \overline{\alpha}z}, z \in D^2.$$

Allora valgono:

- $\Phi_\alpha$  è olomorfa
- $\Phi_\alpha(D^2) = D^2$
- $\Phi_\alpha \circ \Phi_{-\alpha} = \text{id}$
- $\Phi_\alpha(x) = 0 \iff x = \alpha$
- $\frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial z}(0) = 1 - |\alpha|^2$

Inoltre, se  $x \in M$ ,  $\alpha \neq 0$  e  $f : M \rightarrow D^2$  è una funzione olomorfa, se  $-\log|f - \alpha|$  soddisfa **G1**, **G2** e **G3** relativamente a  $x$  allora  $-\log|\Phi_\alpha \circ f|$  soddisfa **G1**, **G2** e **G3** relativamente a  $x$ .

*Dimostrazione.* Le prime asserzioni sono ovvie. Per verificare l'ultima, si osserva che l'unico zero di  $\Phi_\alpha \circ f$  è per  $f(x) = \alpha$ . Vale poi:

$$\log|\Phi_\alpha \circ f| = \log|f - \alpha| + \log\left|\frac{1}{1 - \overline{\alpha}f}\right|$$

dove  $\log\left|\frac{1}{1 - \overline{\alpha}f}\right|$  è armonica positiva, da cui la tesi.  $\square$

**Teorema 2.31.** *Se  $M$  è semplicemente connessa, allora  $M$  è biolomorfa a  $D^2$ .*

*Dimostrazione.* Si tratta di costruire un biolomorfismo  $f : M \rightarrow D^2$ . Sia  $P \in M$  qualsiasi. Per il teorema 2.29 esiste  $g_P$  funzione di Green in  $P$ . Per il lemma 1.6, nell'intorno di ogni punto diverso da  $P$ ,  $-g_P$  è il logaritmo del modulo di una funzione olomorfa. Lo stesso lemma e l'assioma **G3** danno, in un intorno di 0 in  $D^2$ :  $g_P(\phi(z)) + \log|z| = \log|f(z)|$  per qualche  $f > 0$  olomorfa, da cui  $-g_P(\phi(z)) = \log\left|\frac{z}{f(z)}\right|$ . Per il teorema 2.6, esiste una funzione meromorfa  $f_P$  tale che  $-g_P = \log|f_P|$ . In effetti per **G2** è  $|f_P| < 1$ , per cui  $f_P$  è olomorfa a valori in  $D^2$ ; inoltre  $f_P(Q) = 0$  se e solo se  $P = Q$ . Resta da dimostrare che  $f_P$  è iniettiva e suriettiva.

*Iniettività:* Siano  $R, S \in M$  fissati, e sia  $\psi(T) = \Phi_{f_R(S)}(f_R(T))$ ,  $T \in M$ ;  $\psi$  è olomorfa e si annulla in  $S$ . Sia  $\phi : (D^2, 0) \rightarrow (K, S)$  un disco conforme. Allora  $\phi^*\psi(z) = \sum_{k=n}^{\infty} a_k z^k$ , dove  $n > 0$  e  $a_n \neq 0$ . Sia

$$u(T) = -\frac{1}{n} \log|\psi(T)|$$

Allora per il lemma 1.6  $u$  è armonica su  $M \setminus f_R^{-1}(f_R(S))$ , cioè fuori dagli zeri di  $\psi$ . Inoltre  $\phi^*u(z) + \log|z|$  è armonica in un intorno di 0, essendo

$$\phi^*u(z) + \log|z| = \frac{1}{n} \log\left|\frac{z^n}{\phi^*\psi(z)}\right|$$

Ora, se  $u$  ha la sola singolarità in  $S$ , per la proprietà **G4** si può concludere che  $u \geq g_S$ , ossia  $-\log|f_S(T)| \leq -\frac{1}{n} \log|\psi(T)|$ , cioè

$$|\psi(T)| \leq |f_S(T)|. \quad (2.7)$$

Nel caso generale, occorre ricordare che nella dimostrazione del 2.29 si trovava  $g_S(T) = \sup_{v \in \mathcal{F}} v(T)$ , dove

$$\mathcal{F} = \{v : M \setminus \{S\} \rightarrow \mathbb{R} \text{ subarmoniche} \mid v \geq 0, \text{supp } v \cup \{S\} \text{ compatto,} \\ \phi^*v + \log |\cdot| \text{ è subarmonica in un intorno di } 0\}$$

Presa una qualunque  $v \in \mathcal{F}$ , con supporto  $D$ , sia

$$N = \{x \in M \setminus \{S\} \mid v(x) < u(x)\}$$

Ora,  $N$  contiene tutte le singolarità di  $u$  tranne al più  $S$ , e in coordinate locali intorno a  $S$  si può scrivere

$$\phi^*v(z) - \phi^*u(z) = (\phi^*v(z) + \log |z|) - (\phi^*u(z) + \log |z|);$$

quindi  $v - u$  è (localmente) la differenza di una funzione subarmonica e una funzione armonica, quindi subarmonica e dunque soddisfa il principio del massimo. È chiaro che su  $\partial N \cup \partial(D \cup \{S\})$  vale  $v - u \leq 0$ . In conclusione,  $v - u \leq 0$  in  $D \cup \{S\} \setminus N$  per il principio del massimo, in  $N$  per definizione e in  $M \setminus D$  perché  $u \geq 0$ . Passando all'estremo superiore si ottiene  $u \geq g_S$ ; questo dimostra la 2.7. Dunque la funzione meromorfa  $h = \frac{\psi}{f_S}$  è in realtà olomorfa, e inoltre  $|h| \leq 1$ . Ponendo  $T = R$  in 2.7, si ottiene  $|f_R(S)| = |\Phi_{f_R(S)}(0)| \leq |f_S(R)|$ ; e per simmetria si ottiene  $|f_R(S)| = |f_S(R)|$ . Vale dunque

$$|h(R)| = \frac{|\Phi_{f_R(S)}(0)|}{|f_S(R)|} = \frac{|f_R(S)|}{|f_S(R)|} = 1$$

per cui per il principio del massimo  $h$  è costante, perciò

$$f_R(S) = f_R(T) \iff \psi(T) = 0 \iff f_S(T) = 0 \iff S = T$$

*Nota:* Prima di dimostrare la suriettività, si può notare che a questo punto si è già ottenuta l'equivalenza del teorema con il teorema dell'applicazione di Riemann 1.12. Infatti se  $M$  ammette un embedding nel disco, ed essendo iperbolica non può essere isomorfa al piano o alla sfera, il teorema 1.12 implica che  $M$  è isomorfo a  $D^2$ . D'altra parte, la proposizione 1.13 e l'iniettività di  $f_R$  implicano immediatamente il teorema 1.12.

*Suriettività:* Per assurdo, sia  $a \in D^2 \setminus f_P(M)$ . Allora per il corollario 1.7 la funzione  $\Phi_a \circ f_P : M \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$  ammette una radice quadrata iniettiva mai nulla  $g : M \rightarrow D^2$ . Sia  $h = \Phi_{g(P)} \circ g$ . Allora,  $h(x) = 0 \iff x = P$ . Per il lemma 2.30,  $-\log |g| = -\frac{1}{2} \log |\Phi_a \circ f_P|$  soddisfa **G1**, **G2** e **G3**, e ancora per il lemma  $-\log |h|$  soddisfa le medesime; perciò

$$-\log |h| \geq g_P = -\log |f_P|$$

ossia  $|h| \leq |f_P|$ , quindi in un disco conforme  $\phi : (D^2, 0) \rightarrow (K, P)$ , vale

$$1 \leq \lim_{Q \rightarrow P} \left| \frac{f_P(Q)}{h(Q)} \right| = \lim_{z \rightarrow 0} \left| \frac{\phi^* f_P(z)}{z} \frac{z}{\phi^* h(z)} \right| = \left| \frac{\partial \phi^* f_P}{\partial z}(0) / \frac{\partial \phi^* h}{\partial z}(0) \right|$$

D'altra parte, derivando in 0

$$(\Phi_{-g(P)} \circ h \circ \phi)^2 = \phi^* g^2 = \Phi_a \circ f_P \circ \phi$$

si ottiene

$$2g(P) (1 - |g(P)|) \frac{\partial \phi^* h}{\partial z}(0) = (1 - |a^2|) \frac{\partial \phi^* f_P}{\partial z}(0) \implies$$

$$\left| \frac{\partial \phi^* f_P}{\partial z}(0) / \frac{\partial \phi^* h}{\partial z}(0) \right| = \frac{|2g(P)|}{1 + |a|} = \sqrt{\frac{4|a|}{1 + |a|^2 + 2|a|}} < 1$$

che è assurdo.  $\square$

## 2.5 Il caso non iperbolico

Se  $M$  è una superficie di Riemann semplicemente connessa non iperbolica e  $u : M \rightarrow \mathbb{R}$  è subarmonica,  $u < 0$ , allora  $u$  è costante; altrimenti per il teorema 2.31  $M$  dovrebbe essere iperbolica. Si può quindi estendere la definizione 2.24 in questo modo (come in [3]).

**Definizione 2.32.** *Sia  $M$  una superficie di Riemann; si dice che  $M$  è iperbolica se esiste una  $u : M \rightarrow \mathbb{R}$  subarmonica non costante, e  $u < 0$ .*

In questo paragrafo si indicherà con  $M$  una superficie di Riemann non iperbolica, e si dimostrerà il seguente

**Teorema 2.33.** *Se  $M$  è semplicemente connessa, allora  $M$  è biolomorfa ad  $S^2$  se è compatta e a  $\mathbb{C}$  altrimenti.*

Per quanto detto, da questo segue il teorema di uniformizzazione per le superfici di Riemann semplicemente connesse non iperboliche nel senso di 2.24; si osservi tuttavia che il ricorso al teorema 2.31 può essere evitato nel caso compatto; infatti per il principio del massimo una funzione subarmonica negativa su una superficie di Riemann compatta è necessariamente costante. Prima di passare alla dimostrazione, è necessario estendere al caso non iperbolico alcuni risultati che sono immediati nel caso compatto.

**Proposizione 2.34.** *Sia  $D \subset M$ ,  $u \in \mathcal{C}(\overline{D})$  subarmonica in  $D$  e tale che*

$$\sup_{\partial D} u = m_1 < +\infty, \quad \sup_D u = m_2 < +\infty$$

Allora  $m_2 = m_1$ .

*Dimostrazione.* Sia  $v = \max\{u, m_1\} - m_2$ ; allora  $v$  è subarmonica in  $D$ ,  $v|_{\partial D} \equiv m_1 - m_2$ , e  $v \geq m_1 - m_2$ . Per il corollario 2.14,  $v$  si estende a una funzione subarmonica  $\leq 0$ , quindi costante in  $M$ .  $\square$

**Corollario 2.35.** Sia  $D$  un aperto di  $M$ ,  $f \in \mathcal{C}(\overline{D})$ , armonica limitata in  $D$ ; allora

$$\sup_D f = \sup_{\partial D} f, \inf_D f = \inf_{\partial D} f$$

**Lemma 2.36.** Sia  $D \subset M$ ,  $f \in \mathcal{C}(\overline{D}, \mathbb{C})$  limitata,  $f|_D \in \mathcal{H}(D)$ ; allora

$$\sup_D |f| \leq \sqrt{2} \sup_{\partial D} |f|$$

*Dimostrazione.* Sia  $m = \sup_{\partial D} |f|$ ; allora  $|\operatorname{Re} f|, |\operatorname{Im} f| \leq m$  su  $\partial D$ . Per il corollario 2.35,  $|\operatorname{Re} f|, |\operatorname{Im} f| \leq m$  su tutto  $D$ , quindi

$$|f| \leq \sqrt{m^2 + m^2} = m\sqrt{2} \quad \square$$

**Lemma 2.37.** Sia  $K \subset M$  un disco conforme, e  $u \in \mathcal{C}^1(\overline{M \setminus K})$ ,  $u|_{M \setminus K}$  armonica limitata. Allora

$$\int_{\partial K} *du = 0$$

*Dimostrazione.* Nelle ipotesi del lemma, per il principio di riflessione  $u$  si estende a una funzione armonica in un intorno  $\Omega$  di  $M \setminus K$ , che si può assumere regolare; si può anche supporre  $u$  continua in  $\overline{\Omega}$  e, a meno di sommare una costante,  $u \geq 0$ . Sia ora  $\mathcal{D} = \{D \subset M \text{ relativamente compatto e regolare} \mid K \subset D\}$ . Per ogni  $D \in \mathcal{D}$ ,  $D \cap \Omega$  è regolare; sia  $u_D$  la soluzione del problema di Dirichlet per  $D \cap \Omega$ , con condizioni  $u_D|_{\partial \Omega} = u|_{\partial \Omega}$  e  $u_D|_{\partial D} = 0$ ; per il corollario 2.14 si può estendere  $u_D$  a una funzione subarmonica ponendo  $u_D = 0$  su  $M \setminus D$ . Per la proposizione 2.34 si ha

$$D_1 \subset D_2, D_1, D_2 \in \mathcal{D} \implies u_{D_1} - u_{D_2}|_{\partial(D_2 \cap \Omega)} \leq 0 \implies u_{D_1} \leq u_{D_2} \quad (2.8)$$

in  $\Omega$ . D'altra parte per la proposizione 2.21, se  $D_1, D_2 \in \mathcal{D}$  esiste  $D \in \mathcal{D}$ ,  $D \supset D_1, D_2$ , e se  $K \subset \Omega$  è un disco conforme esiste  $\tilde{D} \in \mathcal{D}$ ,  $\tilde{D} \supset K \cup D_1$ ; questo dimostra che  $\{u_D \mid D \in \mathcal{D}\}$  è una famiglia di Perron in  $\Omega$ . Sia

$$\tilde{u} = \sup_{D \in \mathcal{D}} u_D$$

allora  $\tilde{u} - u$  è armonica limitata e si annulla su  $\partial \Omega$ , perciò in virtù del corollario 2.35 si ha  $\tilde{u} = u$  in  $\Omega$ . Ripetendo la costruzione sostituendo 1 al posto di  $u$  (in altri termini,  $u \equiv 1$ ), si ottiene una famiglia di Perron  $\{\omega_D \mid D \in \mathcal{D}\}$ , dove  $\omega_D|_{\partial K} = 1$ ,  $\omega_D|_{\partial D} = 0$ . Per il principio di Perron, in un intorno di  $\partial K$  esistono successioni  $\{D'_i\}, \{D''_i\}$  in  $\mathcal{D}$  tali che

$$\lim_{i \rightarrow \infty} u_{D'_i} = u, \lim_{i \rightarrow \infty} \omega_{D''_i} = 1$$

Per ogni  $i$ , sia  $D_i \in \mathcal{D}$  tale che  $D_i \supset D'_i, D''_i$ . Allora per la 2.8

$$\lim_{i \rightarrow \infty} u_{D_i} = u, \lim_{i \rightarrow \infty} \omega_{D_i} = 1$$

e quindi usando la proposizione 2.8 e l'equazione 2.3

$$\begin{aligned}
\int_{\partial K} {}^* du &= \int_{\partial K} ({}^* du - u^* d1) = \lim_{i \rightarrow \infty} \int_{\partial K} ({}^* du_{D_i} - u_{D_i}^* d\omega_{D_i}) = \\
&= \lim_{i \rightarrow \infty} \int_{\partial(D_i \setminus K)} (-\omega_{D_i}^* du_{D_i} + u_{D_i}^* d\omega_{D_i}) = \\
&= \lim_{i \rightarrow \infty} \int_{D_i \setminus K} (-\omega_{D_i} \triangle u_{D_i} + u_{D_i} \triangle \omega_{D_i}) = 0 \quad \square
\end{aligned}$$

**Teorema 2.38.** *Siano  $K$  un aperto di  $M$ ,  $P$  un punto di  $K$ ,  $f \in \mathcal{H}(K \setminus P)$ . Allora esiste un'unica funzione armonica  $u : M \setminus \{P\} \rightarrow \mathbb{R}$  tale che*

- $u - \operatorname{Re} f$  si estende a una funzione armonica in  $K$  che si annulla in  $P$
- $u$  è limitata in  $M \setminus N$  per ogni  $N$  intorno di  $P$ .

*Dimostrazione.* Se  $u_1$  e  $u_2$  sono due funzioni che soddisfano la tesi, allora  $u_1 - u_2$  è armonica limitata e si annulla in  $P$ , per cui se non fosse  $u_1 = u_2$  allora  $M$  sarebbe iperbolica.

Per dimostrare il viceversa, si può supporre  $K$  disco conforme con parametrizzazione  $\phi : (D^2, 0) \rightarrow (K, P)$ . Per  $0 < \rho < 1$ , sia  $K_\rho = \phi(B(0, \rho))$ , e  $u_\rho$  la soluzione del problema di Dirichlet in  $M \setminus K_\rho$ , con condizione al bordo  $u_\rho|_{\partial K_\rho} = \operatorname{Re} f|_{\partial K_\rho}$ . Per il lemma 2.37, la forma  $du_\rho + i^* du_\rho$  è esatta in  $\overline{K} \setminus K_\rho$ ; quindi ha una primitiva  $F_\rho : \overline{K} \setminus K_\rho \rightarrow \mathbb{C}$ , che risulta olomorfa (si veda 1.6), con  $\operatorname{Re} F_\rho = u_\rho$ . Si costruirà  $u$  come limite di una successione  $\{u_{\rho_n}\}$ , dove  $\{\rho_n\}$  è una successione decrescente; per poter garantire che  $u$  sia armonica, occorre che la convergenza sia uniforme sui compatti. Per ottenere la successione  $\rho_n$  si userà il corollario 2.9; per poterlo applicare bisogna vedere che  $\{u_\rho, \rho < r\}$  è equilimitato in  $K \setminus K_r$ . Sia

$$\phi^*(F_\rho - f)(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_{\rho k} z^k$$

lo sviluppo in serie di Laurent nella corona  $D^2 \setminus B(0, r)$ ; a meno di sommare una costante immaginaria pura, si può supporre  $a_{\rho 0}$  reale. Prendendo le parti reali e scrivendo  $a_{\rho k} = \alpha_k - i\beta_k$  per  $k \geq 0$ ,  $a_{\rho k} = \alpha_k + i\beta_k$  per  $k < 0$ , con  $\alpha_k$  e  $\beta_k$  reali, si ottiene:

$$\begin{aligned}
\phi^*(u_\rho - \operatorname{Re} f)(re^{i\theta}) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (\operatorname{Re} a_{\rho k} r^k \cos k\theta - \operatorname{Im} a_{\rho k} r^k \sin k\theta) = \\
&= \alpha_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} \cos k\theta (r^k \alpha_k + r^{-k} \alpha_{-k}) + \sin k\theta (r^k \beta_k + r^{-k} \beta_{-k}) \quad (2.9)
\end{aligned}$$

Moltiplicando per  $\cos n\theta$  o  $\sin n\theta$ , con  $n \in \mathbb{Z}$ , e integrando in  $d\theta$  si ottiene, per  $\rho \leq r \leq 1$ :

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \phi^*(u_\rho - \operatorname{Re} f)(re^{i\theta}) d\theta = \alpha_0 \quad (2.10)$$

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \phi^*(u_\rho - \operatorname{Re} f)(re^{i\theta}) \cos n\theta d\theta = \alpha_n r^n + \alpha_{-n} r^{-n} \quad (2.11)$$

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \phi^*(u_\rho - \operatorname{Re} f)(re^{i\theta}) \sin n\theta d\theta = \beta_n r^n + \beta_{-n} r^{-n} \quad (2.12)$$

Sostituendo  $r = \rho$ , si vede che

$$\alpha_0 = 0 \quad (2.13)$$

$$\alpha_{-n} = -\rho^{2n} \alpha_n \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (2.14)$$

$$\beta_{-n} = -\rho^{2n} \beta_n \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (2.15)$$

Posto poi  $m = \max_{\partial K} |\operatorname{Re} f|$  e  $m_\rho = \max_{\partial K} |u_\rho|$ , sostituendo  $r = 1$  in 2.11 e 2.12, si ottiene

$$|\alpha_n + \alpha_{-n}| \leq 2(m + m_\rho) \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (2.16)$$

$$|\beta_n + \beta_{-n}| \leq 2(m + m_\rho) \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (2.17)$$

e sostituendo le equazioni 2.14 e 2.15:

$$|\alpha_n| \leq 2 \frac{m + m_\rho}{1 - \rho^{2n}} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (2.18)$$

$$|\beta_n| \leq 2 \frac{m + m_\rho}{1 - \rho^{2n}} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (2.19)$$

Quindi dalla 2.9 si ottiene

$$\begin{aligned} |(u_\rho - \operatorname{Re} f)|_{K_r} &\leq \sum_{n=1}^{+\infty} 4 \frac{m + m_\rho}{1 - \rho^{2n}} (r^n + r^{-n} \rho^{2n}) \leq \\ &\leq \sum_{n=1}^{+\infty} 8 \frac{m + m_\rho}{1 - \rho^{2n}} r^n \leq 8 \frac{m + m_\rho}{1 - r^{2n}} \frac{r}{1 - r} \leq \frac{m + m_\rho}{2} \end{aligned} \quad (2.20)$$

per  $\rho \leq r \leq k$ , con  $k$  sufficientemente piccolo. In particolare, per il principio del massimo, si ottiene:

$$m_\rho \leq \max_{K_r} |u_\rho| \leq \max_{K_r} |\operatorname{Re} f| + \frac{m + m_\rho}{2} \implies m_\rho \leq 2 \max_{K_r} |\operatorname{Re} f| + m \quad (2.21)$$

per  $\rho \leq r \leq k$ . Combinando 2.20 e 2.21 si trova che  $\{u_\rho \mid \rho < r\}$  è equilimitato in  $\mathcal{C}(\partial K_r)$ ; per il principio del massimo (proposizione 2.34) è equilimitato in  $\mathcal{C}(M \setminus K_r)$ . Se  $M$  è a base numerabile, per il corollario 2.9 si ha subito che  $\{u_\rho \mid \rho < r\}$

è relativamente compatto; in generale, si può solo dire che  $\{u_\rho|_{\overline{K} \setminus K_r} \mid \rho < r\}$  è relativamente compatto per  $r \leq k$ , e quindi  $\forall r \leq 1$ . D'altra parte, data una successione  $\{u_{\rho_n}\}$ , a meno di estrarre una sottosuccessione si può supporre che converga uniformemente in  $\overline{K} \setminus K_r$ ; poiché le  $u_\rho$  sono soluzioni proprie del problema di Dirichlet e dunque limitate in  $M \setminus K$ , per il corollario 2.35

$$|u_{\rho_n}(z) - u_{\rho_m}(z)| < \epsilon \forall z \in \overline{K} \setminus K_r \implies |u_{\rho_n}(z) - u_{\rho_m}(z)| < \epsilon \forall z \in M \setminus K_r$$

quindi  $u_{\rho_n}$  è di Cauchy in  $L^\infty(M \setminus K_r)$  e quindi converge uniformemente a una funzione armonica in  $M \setminus K_r$ .

In particolare, dalla successione  $\{F_{2^{-n}}\}$  si può estrarre una sottosuccessione  $\{F_{\rho_{1n}}\}$  uniformemente convergente in  $M \setminus K_{1/2}$ . Si possono poi definire per  $i > 1$  successioni decrescenti  $\{\rho_{in}\}_{n \in \mathbb{N}}$ , in modo che  $\{\rho_{in} \mid n \in \mathbb{N}\} \subset \{\rho_{i-1,n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ , e  $\{u_{\rho_{in}}\}$  converga uniformemente in  $M \setminus K_{2^{-n}}$ . La successione  $\{u_{\rho_{nn}}\}$  converge in  $\mathcal{C}(M \setminus \{P\})$  a una funzione  $u$ . Allora  $u$  è armonica, e anch'essa limitata fuori da ogni  $K_r$  perché le  $u_\rho$  sono equilimitate in  $M \setminus K_r$ . Per vedere che  $u - \operatorname{Re} f$  si estende in  $\{P\}$ , basta osservare che 2.14, 2.18 e 2.21 implicano  $\alpha_{-n} \rightarrow 0$  per  $\rho \rightarrow 0$ , con  $n \in \mathbb{N}$ , e lo stesso vale per  $\beta_{-n}$ . Allora  $u - \operatorname{Re} f$  si estende a una funzione armonica in  $K$  che per l'equazione 2.13 si annulla in  $P$ .  $\square$

**Definizione 2.39.** Per  $x \in M$  si pone

$$F_x = \{f : M \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\} \text{ meromorfa} \mid f \text{ olomorfa in } M \setminus \{x\}, \operatorname{ord}_x f = -1, \\ f|_{M \setminus N} \text{ limitata per ogni } N \text{ intorno di } x\}$$

**Lemma 2.40.** Se  $f \in F_x$ , allora esiste  $U \ni x$  tale che  $\forall y \in U, z \in M \setminus \{y\}$ ,  $f(y) \neq f(z)$ .

*Dimostrazione.* Essendo  $\operatorname{ord}_x f = -1$ , esiste  $V$  intorno relativamente compatto di  $x$  tale che  $f|_V$  è iniettiva. Sia  $m = \max_{\partial V} |f|$ ; per il lemma 2.36,  $|f| \leq m\sqrt{2}$  in  $M \setminus V$ . L'insieme  $U = \{y \in V \mid |f(y)| > m\sqrt{2}\}$  soddisfa la tesi.  $\square$

**Lemma 2.41.** Sia  $x \in M$ ,  $f, g$  funzioni meromorfe su  $M$ , olomorfe in  $M \setminus \{x\}$ , con  $\operatorname{ord}_x f = \operatorname{ord}_x g = -1$ , tali che per ogni intorno  $U$  di  $x$ ,  $\operatorname{Re} f|_{M \setminus U}$  e  $\operatorname{Re} g|_{M \setminus U}$  sono limitate. Allora  $f = L \circ g$  per qualche omografia  $L$ .

*Dimostrazione.* Sia  $U$  un intorno di  $x$  relativamente compatto non denso in  $M$ , tale che  $f|_U$  e  $g|_U$  sono iniettive; si ha che  $\forall y \in U \setminus \{x\}$   $\frac{1}{f-f(y)}$  e  $\frac{1}{g-g(y)}$  sono olomorfe in  $U \setminus \{y\}$ . Sia ora

$$m = \max\{\max_{\partial U} |\operatorname{Re} f|, \max_{\partial U} |\operatorname{Re} g|\}$$

e  $y_0 \in U$  tale che  $|\operatorname{Re} f(y_0)|, |\operatorname{Re} g(y_0)| > 2m$ , e siano

$$\tilde{f} = \frac{1}{f - f(y_0)}, \quad \tilde{g} = \frac{1}{g - g(y_0)}$$

Per il corollario 2.35,  $|\operatorname{Re} f|, |\operatorname{Re} g| \leq m$  in tutto  $M \setminus U$ , per cui  $m > 0$ ; inoltre  $\tilde{f}$  e  $\tilde{g}$  sono olomorfe in tutto  $M \setminus \{y_0\}$ . Poiché  $f$  e  $g$  sono iniettive in  $U$ ,  $\operatorname{ord}_{y_0} \tilde{f} = \operatorname{ord}_{y_0} \tilde{g} = -1$ , per cui un'opportuna combinazione lineare  $c\tilde{f} + c'\tilde{g}$  delle due funzioni è olomorfa in tutto  $M$  (basta prendere  $c = \operatorname{Res}_{y_0} \tilde{g}$ ,  $c' = -\operatorname{Res}_{y_0} \tilde{f}$ ). Vale:

$$|f - f(y_0)| \geq |\operatorname{Re} f - \operatorname{Re} f(y_0)| \geq |\operatorname{Re} f(y_0)| - |\operatorname{Re} f| > m$$

in  $M \setminus U$ , da cui  $|\tilde{f}| < \frac{1}{m}$  in  $M \setminus U$ ; è chiaro che lo stesso vale per  $\tilde{g}$ , quindi  $c\tilde{f} + c'\tilde{g}$  è limitata in  $M \setminus U$ , e per la compattezza di  $\overline{U}$  limitata in  $M$ . Poiché  $M$  non è iperbolica,  $c\tilde{f} + c'\tilde{g}$  è costante; poiché  $\tilde{f} = A \circ f$  e  $\tilde{g} = A \circ g$  con  $A$  omografia, si ha la tesi per  $L = A^{-1} \circ (-c'/c)A$ , che è un'omografia perchè le omografie si identificano con le proiettività di  $\mathbb{P}^1\mathbb{C}$  e quindi sono un gruppo.  $\square$

**Lemma 2.42.** *Siano  $x, y \in M$ ,  $f \in F_x$ ,  $g \in F_y$ ; allora esiste un'omografia  $L$  tale che  $g = L \circ f$ .*

*Dimostrazione.* Sia  $f \in F_x$  fissato, e sia  $\Sigma = \{y \in M \mid g \in F_y \implies L \circ g = f \text{ per qualche omografia } L\}$ ;  $x \in \Sigma \neq \emptyset$ , e si suppone  $M$  connessa, quindi basta vedere che  $\Sigma$  è aperto e chiuso. Sia  $y \in \overline{\Sigma}$ ,  $g \in F_y$ ; per il lemma 2.40 esiste un aperto  $U \ni y$  tale che  $\forall w \in U, z \in M \setminus \{w\}$  vale  $g(z) \neq g(w)$ . Sia

$$\tilde{g} = \frac{1}{g - g(w)}$$

allora  $F_w \ni \tilde{g} = A \circ g$  con  $A$  omografia; infatti  $g$  è iniettiva in  $U$ , quindi  $\operatorname{ord}_w g = -1$ , e per ogni aperto  $N \subset U$ , con  $N \ni w$ ,  $g(N)$  è un aperto di  $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$  che contiene  $g(w) = \infty$ , disgiunto da  $g(M \setminus N)$ , quindi  $g$  è limitata in  $M \setminus N$ . Dato che le omografie formano un gruppo,  $y \in \Sigma$  se e solo se  $w \in \Sigma$ . Quindi se  $y \in \Sigma$ , allora  $U \subset \Sigma$ , per cui  $\Sigma$  è aperto; se  $y \in \partial\Sigma$ , allora  $U \cap \Sigma \neq \emptyset \implies y \in \Sigma$ .  $\square$

**Lemma 2.43.** *Se  $M$  è semplicemente connessa, allora  $F_x$  è non vuoto  $\forall x$ .*

*Dimostrazione.* Sia  $\phi : (D^2, 0) \rightarrow (U, x)$  un disco conforme; per il teorema 2.38 esiste  $u$  armonica su  $M \setminus \{x\}$  tale che  $\phi^*u - \operatorname{Re} \frac{1}{z}$  sia armonica in  $D^2$  e nulla in  $0$ , e per ogni intorno  $U$  di  $x$ ,  $u$  sia limitata in  $M \setminus U$ .

Localmente,  $u$  è la parte reale di una funzione meromorfa; quindi per il teorema 2.6, esiste  $f$  meromorfa su  $M$  tale che  $u = \operatorname{Re} f$  su  $M \setminus \{x\}$ . Poiché  $\operatorname{Re}(\phi^*f - \frac{1}{z})$  è armonica in  $D^2$ , per il lemma 1.6 esiste  $g \in \mathcal{H}(D^2)$  tale che  $\operatorname{Re}(\phi^*f - \frac{1}{z}) = \operatorname{Re} g$ . D'altra parte, in  $D^2 \setminus \{0\}$ ,  $\phi^*f - \frac{1}{z}$  è olomorfa, per cui per il lemma 1.5 si può supporre che vi coincida con  $g$ ; per continuità si ottiene che coincide con  $g$  in tutto  $D^2$ , dunque  $\phi^*f - \frac{1}{z}$  è olomorfa in  $D^2$ . Si può supporre altresì che si annulli in  $0$ . Bisogna verificare che  $\operatorname{Im} f$  è limitata fuori da ogni  $U$ . Sia  $\tilde{f}$  la funzione ottenuta con lo stesso procedimento a partire da  $\frac{i}{z}$  al posto di  $\frac{1}{z}$ , così che  $\phi^*\tilde{f} - \frac{i}{z}$  è olomorfa in  $D^2$ , e  $\operatorname{Re} \tilde{f}$  è limitata fuori da ogni  $U$ . Per il lemma 2.41,  $\tilde{f} = \frac{af-b}{cf-d}$  per qualche  $a, b, c, d$  tali che  $ad - bc \neq 0$ . Poiché  $f(x) = \tilde{f}(x) = \infty$ ,  $c = 0$ , e si

può prendere  $d = 1$ . Quindi  $\phi^* \tilde{f} - \frac{i}{z} = a\phi^* f - b - \frac{i}{z} = i(-ia\phi^* f - \frac{1}{z}) - b$ , perciò  $b = 0, a = i$ . Di conseguenza,  $\text{Im } f = \text{Re } \tilde{f}$ , che per costruzione è limitata fuori da ogni  $U$ .  $\square$

**Dimostrazione del teorema 2.33:** Sia  $x \in M, f \in F_x$ . Siano  $y, z \in M$ , con  $f(y) = f(z)$ ; allora si può scegliere  $g = L \circ f \in F_y$ , con  $L$  omografia. Quindi  $g(y) = g(z)$ ; d'altra parte,  $g(y) = +\infty \implies y = z$ . Quindi  $f$  è iniettiva, e può essere vista come un embedding in  $S^2$ . Se  $M$  è compatta,  $f(M)$  è compatto e aperto, quindi  $f(M) = S^2$ . Se  $M$  è parabolica,  $S^2 \setminus f(M)$  deve contenere almeno un punto; se ne contenesse più d'uno, si potrebbe applicare la proposizione 1.13 e ottenere una funzione olomorfa limitata non costante su  $M$ , che sarebbe assurdo.

## 2.6 Conseguenze

In questo paragrafo si dimostrano alcune semplici conseguenze di quanto precede. In particolare, si dimostra l'esistenza di funzioni meromorfe non costanti, usando le funzioni armoniche con singolarità che nel caso semplicemente connesso permettevano di dimostrare il teorema di uniformizzazione.

**Teorema 2.44 (Radò).** *Ogni superficie di Riemann  $M$  è a base numerabile*

*Dimostrazione.* Per il teorema di uniformizzazione il rivestimento universale è a base numerabile; poiché un'omeomorfismo locale manda basi in basi, segue la tesi.  $\square$

**Teorema 2.45.** *Ogni superficie di Riemann ammette una funzione meromorfa non costante.*

*Dimostrazione.* Sia  $M$  una superficie di Riemann, e siano  $x_1, x_2$  due suoi punti distinti. Se  $M$  è iperbolica nel senso di 2.32, si può applicare il teorema 2.29 e costruire  $f_j$  funzione di Green per  $x_j, j = 1, 2$ . Sia  $\omega_j = df_j + i^* df_j$ , e sia  $\phi : D^2 \rightarrow K$  un disco conforme in  $M$ ; allora

$$\phi^* \omega_j = 2 \frac{\partial \phi^* f_j}{\partial z} dz.$$

Se  $x_j \notin K$ ,  $\frac{\partial \phi^* f_j}{\partial z}$  è olomorfa per **G1**; se invece  $\phi(0) = x_j$ ,

$$\frac{\partial \phi^* f_j + \log |z|}{\partial z} = \frac{\partial \phi^* f_j}{\partial z} + \frac{1}{2z}$$

è olomorfa per **G3**. In entrambi i casi,  $\phi^* \omega_j = g_j dz$  con  $g_j$  meromorfa. Ponendo  $\phi^* g = g_1/g_2$ , si ottiene l'unica funzione meromorfa  $g$  su  $M$  tale che  $\omega_1 = g\omega_2$ . Poiché  $g$  ha un polo in  $x_1$  e uno zero in  $x_2$ , non è costante.

Se invece  $M$  è non iperbolica nel senso di 2.32, si può applicare il teorema 2.38 e ottenere una funzione  $f_j$  armonica in  $M \setminus \{x_j\}$  tale che per un disco conforme

$\phi : (D^2, 0) \rightarrow (K, x_j)$ ,  $\phi^* f_j + \operatorname{Re} \frac{1}{z}$  si estenda a una funzione armonica in  $K$ . Si ha dunque che la funzione

$$\frac{\partial \phi^* f_j + \operatorname{Re} \frac{1}{z}}{\partial z} = \frac{\partial \phi^* f_j}{\partial z} - \frac{1}{z^2}$$

è olomorfa, e si può procedere come prima.  $\square$

**Corollario 2.46.** *Ogni superficie di Riemann compatta è triangolabile.*

*Dimostrazione.* Sia  $M$  una superficie di Riemann compatta e  $f : M \rightarrow S^2$  olomorfa non costante. L'insieme dei valori critici è discreto e compatto, per cui è finito; esiste allora una triangolazione  $\tau$  di  $S^2$  tale che ogni valore critico di  $f$  è vertice di qualche triangolo di  $\tau$ . Le controimmagini per  $f$  dei triangoli di  $\tau$  danno una triangolazione di  $M$ .  $\square$

**Teorema 2.47.** *Ogni superficie di Riemann  $M$  ammette una metrica riemanniana compatibile con la sua struttura conforme, tale che la curvatura è costante.*

*Dimostrazione.* Sia  $\tilde{M}$  il rivestimento universale di  $M$ . Esiste un'unica struttura di superficie di Riemann per  $\tilde{M}$  tale che la mappa che dà il rivestimento sia olomorfa. Con questa struttura,  $\pi_1(M)$  agisce su  $\tilde{M}$  come un gruppo di automorfismi olomorfi; l'azione è libera e propriamente discontinua. Per il teorema di uniformizzazione, si può supporre che  $\tilde{M}$  sia  $S^2$ ,  $D^2$  oppure  $\mathbb{C}$ . Nel primo caso, l'azione di  $\pi_1(M)$  è necessariamente banale, perché per il teorema di Brouwer ogni automorfismo di  $S^2$  ha un punto fisso. Nel secondo caso, per il teorema di Liouville  $\pi_1(M)$  agisce come un gruppo di isometrie iperboliche (si veda [7]). Nel terzo caso, basta osservare che un biolomorfismo del piano in sé non può avere una singolarità essenziale intorno a  $\infty$ , perché altrimenti per il teorema di Picard non sarebbe iniettivo; perciò il suo sviluppo in serie è in realtà un polinomio, che ancora per l'iniettività è del tipo  $az + b$ , dove  $a \neq 0$  per la suriettività; quindi  $\pi_1(M)$  agisce su  $\mathbb{C}$  come un gruppo di isometrie euclidee. In conclusione, la struttura riemanniana di  $\tilde{M}$  passa al quoziente.  $\square$

## Capitolo 3

# Una dimostrazione geometrica del teorema di uniformizzazione assumendo il caso compatto

Si è visto nel paragrafo 2.5 che vale il seguente

**Teorema 3.1.** *Se  $M$  è una superficie di Riemann compatta e semplicemente connessa, allora  $M$  è biolomorfa a  $S^2$ .*

In effetti la dipendenza del paragrafo 2.5 dal paragrafo 2.4 riguarda solo il caso non compatto; inoltre la proposizione 2.34 e il lemma 2.36 sono banali nel caso compatto. Per di più, se si ammette che  $M$  sia triangolabile, per il teorema di classificazione delle superfici si ha che  $M$  è omeomorfa alla sfera, per cui nell'enunciato del lemma 2.37  $M \setminus K$  è semplicemente connesso e quindi la dimostrazione del lemma stesso è immediata. Si vedrà nel capitolo successivo che la dimostrazione del teorema 3.1 data nel capitolo 2 si riduce al teorema 2.38, e al lemma 2.37 se non si vuole supporre la triangolabilità. Si osservi però che la dimostrazione di entrambi richiedeva l'esistenza della soluzione del problema di Dirichlet.

A partire da questo risultato e dal teorema dell'applicazione di Riemann, si dimostrerà seguendo Demailly il teorema di uniformizzazione nel caso non compatto. Per chiarezza, è opportuno dare la seguente

**Definizione 3.2.** *Un atlante  $C^\infty$  su uno spazio topologico di Hausdorff  $M$  è una collezione  $\{U_\alpha, \psi_\alpha\}_{\alpha \in I}$  dove  $\psi_\alpha : U_\alpha \rightarrow V_\alpha \subset \mathbb{R}^2$  è un omeomorfismo di aperti,  $\bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha = X$  e le applicazioni  $\psi_\alpha \circ \psi_\beta^{-1} : \psi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \psi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$  sono  $C^\infty$  per  $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ . Due atlanti si dicono compatibili se la loro unione è un atlante;*

una struttura di superficie differenziabile per  $M$  è una classe di equivalenza di atlanti per la relazione di essere compatibili. Si dice che uno spazio topologico di Hausdorff  $M$  con una struttura di superficie differenziabile è una superficie differenziabile se è paracompatto. In generale dato  $M$  di Hausdorff con una struttura di superficie differenziabile, un insieme paracompatto  $N \subset M$  è una sottosuperficie differenziabile a bordo di  $M$  se ogni punto di  $N$  è contenuto in una carta  $U_\alpha$  di  $M$  tale che  $\phi_\alpha(U_\alpha \cap N)$  è un aperto di  $\mathbb{H}^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 0\}$ .

In particolare, si osservi che una superficie di Riemann a priori ha un atlante  $C^\infty$  ma può non essere una superficie differenziabile; tuttavia si possono definire le sue sottosuperfici differenziabili.

**Lemma 3.3.** *Sia  $M$  una superficie di Riemann non compatta,  $K \subset M$  compatto. Allora  $K$  ha un intorno connesso e compatto che è una sottosuperficie differenziabile di  $M$ .*

*Dimostrazione.* Poiché  $K$  è compatto, ha un numero finito di componenti connesse; a meno di aggiungere un numero finito di archi che le congiungono si può supporre  $K$  connesso. Sia  $A$  un intorno aperto relativamente compatto di  $K$  (in particolare,  $A$  è paracompatto); esiste una  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$   $C^\infty$  tale che  $f|_K \equiv 1$ ,  $f|_{M \setminus A} \equiv 0$ . Per il lemma di Sard (si veda [5]) esiste  $r \in (0, 1)$  valore regolare per  $f$ ; allora  $f^{-1}([r, 1])$  è una sottovarietà a bordo di  $M$ , contenuta in  $A$  e dunque compatta, la cui parte interna contiene  $K$ . La sua componente connessa che contiene  $K$  è l'intorno cercato.  $\square$

In generale, se  $M$  è uno spazio topologico di Hausdorff non compatto con un atlante, si può dimostrare (si veda [10]) che  $H_2(M) = 0$ . Nel seguito basterà un risultato più debole:

**Teorema 3.4.** *Se  $M$  è una superficie di Riemann non compatta, allora il gruppo di omologia a coefficienti in  $\mathbb{R}$   $H_2(M, \mathbb{R})$  è nullo.*

*Dimostrazione.* Sia  $[\gamma] \in H_2(M, \mathbb{R})$ ; il supporto di  $\gamma$  è compatto per cui applicando il lemma 3.3 si trova una sottosuperficie differenziabile  $A = \overset{\circ}{V} \subset M$  e  $\beta \in H_2(A, \mathbb{R})$  tale che  $i_*(\beta) = [\gamma]$ , dove  $i_*$  è l'omomorfismo indotto dall'inclusione; se si dimostra che  $H_2(A, \mathbb{R}) = 0$ , si ha  $\beta = 0$  e quindi  $[\gamma] = 0$ . Ora, l'integrazione delle due forme dà una dualità  $H_2(A, \mathbb{R}) \cong H_{DeRham}^2(A)^*$ . La dualità di Poincaré dà poi  $H_{DeRham}^2(A)^* \cong H_C^0(A)$  dove  $H_C^0(A)$  è lo spazio delle 0-forme a supporto compatto, che è nullo perché  $A$  è aperto, per cui non è compatto (altrimenti sarebbe chiuso, quindi  $A = M$  che non è compatto); di conseguenza,  $H_2(A, \mathbb{R}) = 0$ .  $\square$

**Corollario 3.5.** *Sia  $M$  una superficie di Riemann non compatta e semplicemente connessa,  $\gamma : S^1 \rightarrow \Gamma \subset M$  un embedding. Allora  $M \setminus \Gamma$  ha due componenti connesse, delle quali esattamente una è semplicemente connessa.*

*Dimostrazione.* Sia  $B$  un intorno tubolare di  $\Gamma$ ; poiché  $M$  è orientabile, esiste un diffeomorfismo  $i : S^1 \times (-1, 1) \rightarrow B$ , tale che  $i(\cdot, 0) = \gamma$ . Poiché  $B \setminus \Gamma$  ha due componenti connesse ed  $M$  è connesso per archi,  $M \setminus \Gamma$  può avere al più due componenti connesse. Se per assurdo fosse connesso, si potrebbe tagliare lungo  $\Gamma$  e ottenere uno spazio topologico connesso  $N = M \setminus \Gamma \sqcup \Gamma^+ \sqcup \Gamma^-$ ; si consideri  $N \times \{\pm 1\} / \sim$ , dove  $\sim$  è la relazione di equivalenza che identifica  $(\Gamma^+, 1)$  con  $(\Gamma^-, -1)$ ,  $(\Gamma^-, 1)$  con  $(\Gamma^+, -1)$ . Si ottiene così un rivestimento a due fogli di  $M$ , contraddicendo il fatto che  $M$  è semplicemente connesso.

Dunque si può scrivere  $M = U_1 \cup U_2$  dove  $U_j$  contiene una componente connessa di  $M \setminus \Gamma$ ,  $j = 1, 2$ , e  $U_1 \cap U_2 = B$ . Si consideri il diagramma commutativo:

$$\begin{array}{ccc}
 \pi_1(U_1) & \xrightarrow{\phi_1} & \\
 i_{1*} \uparrow & & \\
 \pi_1(B) & \xrightarrow{0} & \frac{\pi_1(U_1)}{i_{1*}(\pi_1(B))} \oplus \frac{\pi_1(U_2)}{i_{2*}(\pi_1(B))} \\
 i_{2*} \downarrow & & \\
 \pi_1(U_2) & \xrightarrow{\phi_2} & 
 \end{array}$$

dove  $i_{1*}, i_{2*}$  sono gli omomorfismi indotti dalle inclusioni,  $\phi_1(\alpha) = ([\alpha], 0)$ ,  $\phi_2(\beta) = (0, [\beta])$ . Per il teorema di Van Kampen, si può fattorizzare come:

$$\begin{array}{ccc}
 \pi_1(U_j) & \xrightarrow{\phi_j} & \frac{\pi_1(U_1)}{i_{1*}(\pi_1(B))} \oplus \frac{\pi_1(U_2)}{i_{2*}(\pi_1(B))} \\
 & \searrow \eta_j & \uparrow \\
 & & \pi_1(M) = 0
 \end{array}$$

dove  $\eta_j$  sono le mappe indotte dall'inclusione, per cui  $\phi_j = 0$ ; quindi  $i_{1*}$  e  $i_{2*}$  sono suriettive, e

$$\pi_1(U_j) \cong \pi_1(B) / \ker i_{j*} \cong \mathbb{Z} / m_j \mathbb{Z}$$

per opportuni  $m_j \in \mathbb{Z}$ , perché  $B$  è omeomorfo a  $S^1 \times (-1, 1)$ . Quindi

$$H_1(U_j) \cong \pi_1(U_j) \cong \mathbb{Z} / m_j \mathbb{Z}.$$

Per il teorema 3.4,  $H_2(M, \mathbb{R}) = 0$ ; per ipotesi inoltre  $H_1(M) = 0$ . La successione di Mayer-Vietoris della terna  $(M, U_1, U_2)$  dà il seguente diagramma:

$$\begin{array}{ccccccc}
 H_2(M) & \xrightarrow{\delta} & H_1(B) & \longrightarrow & H_1(U_1) \oplus H_1(U_2) & \longrightarrow & H_1(M) = 0 \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \cong & & \downarrow \\
 H_2(M; \mathbb{R}) & \xrightarrow{\cong} & H_2(M) \otimes \mathbb{R} & \xrightarrow{\delta'} & \mathbb{Z} & & \mathbb{R} \\
 & & \searrow \delta'' & & \downarrow & & \\
 & & & & \mathbb{R} & & 
 \end{array}$$

Se fosse  $\delta \neq 0$ , sarebbe  $\delta' \neq 0$  e quindi tensorizzando per  $\mathbb{R}$  si otterrebbe un omomorfismo non nullo  $\delta'' : H_2(M) \otimes \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , contraddicendo il teorema 3.4.

Quindi  $H_1(B) \cong H_1(U_1) \oplus H_1(U_2)$ , e quindi dev'essere  $m_1 = 0$ ,  $m_2 = \pm 1$  oppure  $m_1 = \pm 1$ ,  $m_2 = 0$ . Per concludere, basta osservare che  $U_j$  è omotopicamente equivalente alla componente connessa di  $M \setminus \Gamma$  che contiene.  $\square$

Una superficie differenziabile a bordo  $V$  è per definizione una sottosuperficie a bordo di qualche superficie differenziabile  $M$ . Si consideri l'insieme  $DV = V \times \{\pm 1\} / \sim$ , dove  $(x, \epsilon) \sim (x', \epsilon')$  se  $x = x'$  e  $\epsilon = \epsilon'$  o  $x = x' \in \partial V$ , con la topologia quoziente. È chiaro che  $DV \setminus (\partial V \times \{\pm 1\})$  è una superficie differenziabile tale che  $i : V \rightarrow DV$  data da  $i(x) = [(x, 1)]$  e  $\sigma : DV \rightarrow DV$  data da  $\sigma([(x, \epsilon)]) = [(x, -\epsilon)]$  sono  $C^\infty$ ; tale struttura può essere estesa a  $DV$ , perché la riflessione rispetto all'asse  $x$  in  $\mathbb{R}^2$  è  $C^\infty$ . Si dice allora che  $(V \xrightarrow{i} DV, \sigma)$  è il doppio di  $V$ .

**Lemma 3.6.** *Sia  $V$  una superficie differenziabile a bordo, connessa, semplicemente connessa, con bordo non vuoto e compatto. Allora  $V$  è compatta.*

*Dimostrazione.* Sia  $\Gamma$  una componente connessa di  $\partial V$ ; allora  $\Gamma$  è una 1-varietà compatta e quindi è diffeomorfa a  $S^1$ . Sia  $B$  un intorno tubolare di  $\Gamma$ , tale che esista un diffeomorfismo  $\phi : S^1 \times [0, 1] \rightarrow B$ , con  $\phi(S^1 \times \{0\}) = \Gamma$ . Poiché  $V \setminus B$  è semplicemente connessa,  $S^1 \ni t \rightarrow \phi(t, 1) \in V$  è omotopo in  $V \setminus \overset{\circ}{B}$  a un cammino banale; esiste quindi un'omotopia  $C^\infty F : B(0, 1/2) \rightarrow V \setminus \overset{\circ}{B}$  tale che  $F(\rho e^{i\theta}) = \phi((e^{i\theta}, 1))$  per  $r > 1/3$ . Allora  $F$  può essere prolungata a una funzione  $C^\infty \tilde{F} : \overline{D^2} \rightarrow V$  ponendo  $\tilde{F}(\rho e^{i\theta}) = \phi((e^{i\theta}, 2 - 2\rho))$ . Inoltre,  $\tilde{F}$  può essere ulteriormente estesa a una funzione  $C^\infty \hat{f} : S^2 = \overline{DD^2} \rightarrow DM$ , per cui i punti di  $\Gamma$  sono valori regolari con esattamente una controimmagine. Quindi  $\hat{f}$  ha grado 1 modulo 2, quindi è suriettiva, e  $f(\overline{D^2}) = M$  è compatto.  $\square$

**Proposizione 3.7.** *Sia  $M$  una superficie di Riemann,  $V \subset M$  una sottosuperficie differenziabile a bordo. Allora il suo doppio  $(V \xrightarrow{i} DV, \sigma)$  ha un'unica struttura di superficie di Riemann per cui  $i|_{\overset{\circ}{V}}$  e  $\sigma \circ i|_{\overset{\circ}{V}}$  sono olomorfe.*

Si può osservare che  $i$  risulta olomorfa in  $V$  se e solo se  $\partial V$  è analitico; in tal caso, la dimostrazione segue semplicemente dal principio di riflessione.

*Dimostrazione.* La condizione che  $i|_{\overset{\circ}{V}}$  e  $\sigma \circ i|_{\overset{\circ}{V}}$  siano olomorfe induce un'unica struttura di superficie di Riemann su  $DV \setminus \Gamma$ , dove  $\Gamma = i(\partial V)$ ; bisogna trovare per ogni  $y \in \Gamma$  una carta  $\phi_y : U_y \rightarrow V_y$ , con  $V_y \subset \mathbb{C}$ , in modo che l'unione dell'insieme delle  $\{\phi_y\}_{y \in \Gamma}$  e l'atlante su  $DV \setminus \Gamma$  sia un atlante conforme su  $DV$ . Sia  $y = i(x)$ ,  $\phi : (D^2, 0) \rightarrow (K, i^{-1}(x))$  un disco conforme in  $M$ ;  $K$  contiene una carta differenziabile intorno a  $x$  in cui  $\partial V$  appare rettilineo, per cui per qualche intorno aperto  $K'$  di  $x$  in  $K$ ,  $W = \phi^{-1}(K' \cap \overset{\circ}{V})$  è un dominio di Jordan. Allora per il teorema dell'applicazione di Riemann esiste  $h : D^2 \rightarrow \overline{W}$  biolomorfismo; inoltre per il teorema 1.38  $h$  si estende a un omeomorfismo  $\tilde{h} : \overline{D^2} \rightarrow \overline{W}$ ; poiché

$x \in \partial V$  implica  $0 = \phi^{-1}(x) \in \partial W$ , si può supporre  $\tilde{h}(1) = 0 = \phi^{-1}(x)$ . Se  $\psi : \mathbb{H}^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 0\} \rightarrow \overline{D^2}$  è dato da  $\psi(z) = -\frac{z-i}{z+i}$ , e  $U$  è un intorno aperto di 0 in  $\mathbb{H}^2$  tale che  $\phi(\tilde{h}(\psi(U \cap \mathbb{R}))) \subset \partial V$ , dove  $\mathbb{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0\}$ , allora per riflessione  $i \circ \phi \circ \tilde{h} \circ \psi|_U : U \rightarrow i(\phi(\overline{W}))$  si estende a un omeomorfismo  $\eta$  da  $V_y = U \cup \overline{U}$  in  $U_y = i(\phi(\overline{W})) \cup \sigma(i(\phi(\overline{W})))$ ;  $\eta$  è olomorfa in  $V_y \setminus \mathbb{R}$ . Sia  $\phi_y = \eta^{-1}$ ; se  $\zeta : U_0 \rightarrow V_0 \subset \mathbb{C}$  è una carta di  $DV \setminus \Gamma$  con  $U_0 \cap U_y \neq \emptyset$ , è chiaro che  $\phi_y \circ \zeta^{-1}|_{\zeta(U_0 \cap U_y)}$  è olomorfa. Se poi  $y, y' \in \Gamma$  sono tali che  $U_y \cap U_{y'} \neq \emptyset$ , allora  $\phi_{y'} \circ \phi_y^{-1}|_{\phi_y(U_y \cap U_{y'})}$  è continua e olomorfa fuori dall'arco analitico  $\phi_y(\Gamma) \subset \mathbb{R}$ , per cui è olomorfa per il teorema 1.47.  $\square$

**Teorema 3.8.** *Sia  $M$  una superficie di Riemann semplicemente connessa e non compatta; sia  $K \subset M$  compatto. Allora  $K$  ha un intorno compatto  $V$  che è una sottosuperficie differenziabile a bordo di  $M$ , tale che  $\overset{\circ}{V}$  è biolomorfo a  $D^2$ .*

*Dimostrazione.* Per il lemma 3.3,  $K$  ha un intorno  $V$  che è una sottosuperficie differenziabile a bordo di  $M$  connessa e compatta. Il suo bordo è compatto, e le sue componenti connesse  $\Gamma_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  sono varietà compatte di dimensione 1, per cui sono diffeomorfe a  $S^1$ . Ne segue per il corollario 3.5 che  $M \setminus \Gamma_i$  ha una componente connessa semplicemente connessa  $U_i$ . Per il lemma 3.6,  $\overline{U_i} = U_i \cup \Gamma_i$  è compatto. Ora,  $\overset{\circ}{V}$  è connessa, e i chiusi non vuoti  $\overline{U_i}$  e  $M \setminus U_i$  si intersecano in  $\Gamma_i \subset M \setminus \overset{\circ}{V}$ ; quindi per ogni  $i$  si ha che  $\overset{\circ}{V} \subset U_i$  oppure  $\overset{\circ}{V} \subset M \setminus U_i$ . Se non si verificasse la prima possibilità per nessun  $i$ , allora  $V \cup \bigcup_{i=1}^n \overline{U_i}$  sarebbe chiuso e aperto, perché sarebbe un intorno di ogni punto di  $\overset{\circ}{V}$ , di  $U_i$  e di  $\Gamma_i$ ; quindi  $M = V \cup \bigcup_{i=1}^n \overline{U_i}$  sarebbe compatto, che è assurdo. Allora esiste  $i$  per cui  $\overset{\circ}{V} \subset U_i$ ;  $\overline{U_i}$  è compatto, connesso e semplicemente connesso, è una sottosuperficie differenziabile a bordo di  $M$  e contiene  $K$ . Il doppio di Klein  $D\overline{U_i}$  è ancora semplicemente connesso e compatto; per la proposizione 3.7,  $D\overline{U_i}$  è una superficie di Riemann, per cui (teorema 3.1) è biolomorfo a  $S^2$ . Di conseguenza, per il teorema 1.12  $U_i$  è biolomorfo a  $D^2$ .  $\square$

**Teorema 3.9 (Montel).** *Sia  $D \subset \mathbb{C}$  un aperto connesso,  $f_n$  una successione di funzioni olomorfe da  $D$  in  $\mathbb{C} \setminus \{x_1, x_2\}$ . Allora  $f_n$  tende uniformemente a  $\infty$  sui compatti oppure  $\{f_n\}$  ammette una sottosuccessione convergente sui compatti a una funzione olomorfa.*

*Dimostrazione.* Basta dimostrare che  $f_n$  ammette una sottosuccessione convergente uniformemente sui compatti a  $\infty$  o a una funzione olomorfa. Ci si può ridurre al caso  $D$  semplicemente connesso (in effetti è questo il caso che servirà nel seguito). Infatti sia  $D_1, \dots, D_n, \dots$  un ricoprimento numerabile di  $D$  con aperti semplicemente connessi; se il teorema vale per i  $D_i$ , l'insieme

$$\left\{ z \in D \mid \lim_{n \rightarrow \infty} |f_n(z)| = +\infty \right\}$$

è aperto e chiuso in  $D$ . Se coincide con  $D$ , la tesi segue. Se invece è vuoto, si può scegliere una sottosuccessione  $\{f_n^1\}_{n \in \mathbb{N}}$  di  $f_n$  convergente sui compatti di

$D_1$ ; per  $k > 1$ , si può scegliere una sottosuccessione di  $\{f_n^{k-1}\}_{n \in \mathbb{N}}$  convergente sui compatti di  $D_k$ . La sottosuccessione  $f_n^k$  converge allora uniformemente sui compatti di  $D$ .

Sia dunque  $D$  semplicemente connesso,  $z \in D$ . La retta passante per  $x_1$  e  $x_2$  divide  $\mathbb{C}$  in due semipiani aperti; a meno di estrarre una sottosuccessione, si può supporre  $f_n(z) \in \overline{H}$  per ogni  $n$ , dove  $H$  è uno dei due semipiani. Scelto un qualunque triangolo geodetico ideale  $T$  in  $D^2$ , per il teorema dell'applicazione di Riemann esiste  $\phi : H \rightarrow T$  biolomorfismo. Il teorema 1.38, applicato a un biolomorfismo da  $H$  in  $D^2$  composto con  $\phi$ , dimostra che  $\phi$  si estende a un omeomorfismo dalla chiusura di  $H$  in  $S^2$  in  $\overline{T}$ . Si può supporre che i vertici del triangolo siano le immagini dei punti  $x_1, x_2$  e  $\infty$ . Intorno a ogni punto di  $\partial H \setminus \{x_1, x_2, \infty\}$ , il bordo di  $H$  ha per immagine un arco di circonferenza, per cui si può estendere  $\phi$  per riflessione; in  $\mathbb{C} \setminus \partial H$  si può poi estendere per prolungamento analitico. Si ottiene così una componente connessa  $g$  del fascio dei germi di funzioni olomorfe  $\mathcal{O}(\mathbb{C} \setminus \{x_1, x_2\})$ , tale che  $\phi$  dà luogo a una sezione del rivestimento  $i^*(g \xrightarrow{p} \mathbb{C} \setminus \{x_1, x_2\})$ , dove  $p$  è la proiezione e  $i : H \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{x_1, x_2\}$  è l'inclusione. Non esistono però sezioni globali, o se si vuole,  $g$  è multivalente; in caso contrario infatti si avrebbe una funzione olomorfa non costante e limitata su  $\mathbb{C} \setminus \{x_1, x_2\}$ , che si potrebbe quindi estendere a tutto  $\mathbb{C}$ , che è assurdo (ad esempio per la proposizione 2.25). Tuttavia,  $f_{n*}(\pi_1(D)) = 0$ , per cui  $f_n^*(g \xrightarrow{p} \mathbb{C} \setminus \{x_1, x_2\})$  ammette una sezione globale che può essere vista come una funzione olomorfa  $g_n : D \rightarrow \mathbb{C}$ ;  $g_n$  risulta univocamente determinata se si impone la condizione  $g_n(z) \in T$ .

La valutazione di  $g$  (che manda una coppia  $(z, f)$  in  $f(z)$ ) ha immagine  $D^2$ ; infatti, si consideri un cammino  $\gamma : ([0, 1], 0) \rightarrow (\mathbb{C} \setminus \{x_0, x_1\}, x)$  dove  $x \in H$ . Sia  $A$  l'insieme dei  $t \in [0, 1]$  tali che  $\gamma(t) \in \partial H$ , ed esiste  $\epsilon > 0$  tale che  $\gamma((t - \epsilon, t))$  non interseca  $\partial H$  e  $\gamma([t, t + \epsilon))$  non interseca le due componenti connesse di  $\partial H \setminus \{x_1, x_2, \infty\}$  (cioè le controimmagini dei lati aperti del triangolo) che non contengono  $\gamma(t)$ . Allora  $A$  è discreto, e compatto perché il complementare è aperto, quindi  $A = \{t_1, \dots, t_n\}$ ,  $t_1 < \dots < t_n$ . Per costruzione,  $\gamma([0, t_1])$  è contenuto in  $T$ ;  $\gamma([t_1, t_2])$  è contenuto in  $\hat{T} \cup \hat{T}_1$  dove  $T_1$  è il triangolo geodetico ideale ottenuto da  $T$  per riflessione rispetto al lato che contiene  $\phi(\gamma(t_1))$ , e con  $\hat{T}$  si indica la chiusura di  $T$  meno i vertici. Iterativamente,  $\gamma([t_k, t_{k+1}]) \subset \hat{T} \cup \hat{T}_1 \cup \dots \cup \hat{T}_k \subset D^2$ , dove  $T_{k+1}$  è ottenuto da  $T_k$  per riflessione rispetto al lato che contiene  $\phi(\gamma(t_k))$ . Questo vale per ogni  $\gamma$  e quindi la valutazione di  $g$  ha immagine contenuta in  $D^2$ ; d'altra parte, ogni punto di  $D^2$  è contenuto in qualche triangolo di un'opportuna sequenza  $T_1, \dots, T_n$  come sopra, per cui la valutazione di  $g$  ha immagine  $D^2$ . Inoltre, si può osservare che i triangoli ideali così costruiti sono disgiunti, per cui la valutazione ammette un'inversa  $\mu : D^2 \rightarrow g$ .

L'insieme  $\{g_n\} \subset \mathcal{H}(D)$  è equilimitato; per il corollario 1.18 esiste una sottosuccessione  $g_{n_k}$  che converge uniformemente sui compatti a qualche funzione  $g_\infty : D \rightarrow \overline{D^2}$  olomorfa. Se  $g_\infty(D) \subset D^2$  (in particolare, se  $g_\infty$  non è costante,

perché in tal caso è aperta), si può porre  $f_\infty = p \circ \mu \circ g_\infty : D \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{x_1, x_2\}$ . Vale poi  $f_{n_k} - f_\infty = p \circ \mu \circ g_{n_k} - p \circ \mu \circ g_\infty$ , e poiché sui compatti  $p \circ \mu$  è uniformemente continua, la convergenza uniforme di  $g_{n_k}$  a  $g_\infty$  implica la convergenza uniforme di  $f_{n_k}$  a  $f_\infty$ .

Se invece  $g_\infty \equiv w$  dove  $|w| = 1$ , poiché  $g_n(z) \in T$  per ogni  $n$ , la condizione  $g_n(z) \rightarrow w$  implica  $w \in \phi(\{x_1, x_2, \infty\})$ . Per costruzione, si ha che  $f_n$  converge puntualmente a una funzione costante, pari a  $x_1, x_2$  o  $\infty$ ; bisogna vedere che la convergenza è uniforme sui compatti. Se  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z) = x_1$ , sia  $h_n : D \rightarrow \mathbb{C}$  una radice quadrata di  $f_n - x_1$  (corollario 1.7); allora  $h_n(D)$  non contiene  $\pm\sqrt{x_2 - x_1}$ , e  $\lim_{n \rightarrow +\infty} h_n(z) = 0$ . Per la prima parte della dimostrazione,  $h_n$  converge uniformemente sui compatti a una funzione olomorfa

$$h : D \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{\pm\sqrt{x_2 - x_1}\};$$

allora  $f_n$  tende a  $h^2 + x_1$  uniformemente sui compatti. Se  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z) = x_2$  si procede allo stesso modo, scambiando i ruoli di  $x_1$  e  $x_2$ . Se  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z) = \infty$ , si prende  $h_n : D \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{\pm\sqrt{1/(x_2 - x_1)}\}$  tale che

$$h_n^2 = \frac{1}{f_n - x_1};$$

si ha  $\lim_{n \rightarrow +\infty} h_n(z) = 0$ , quindi per la prima parte della dimostrazione  $h_n \rightarrow h$  uniformemente sui compatti, e  $f_n = x_1 + h_n^{-2} \rightarrow \infty$  uniformemente sui compatti.  $\square$

**Teorema 3.10.** *Sia  $M$  una superficie di Riemann semplicemente connessa non compatta; allora  $M$  è biolomorfa a  $D^2$  o a  $\mathbb{C}$ .*

*Dimostrazione.* Siano  $x_0, x_1 \in M$  due punti distinti fissati, e sia

$$\mathcal{V} = \{V \mid V \subset M \text{ sottovarietà differenziabile a bordo compatta per cui esiste } \phi_V : \overset{\circ}{V} \rightarrow B(0, r_V) \text{ biolomorfismo, } \phi_V(x_0) = 0, \phi_V(x_1) = 1\}$$

Per il teorema 3.8,  $\mathcal{V}$  è non vuoto. Siano  $V, V' \in \mathcal{V}$  tali che  $V \subset V'$ ; dati  $\phi_V : V \rightarrow B(0, r_V)$  e  $\phi_{V'} : V' \rightarrow B(0, r_{V'})$  biolomorfismi come nella definizione, si ha che  $\frac{r_V}{r_{V'}} \phi_{V'} \circ \phi_V^{-1} : B(0, r_V) \rightarrow B(0, r_{V'})$  manda 0 in 0 e 1 in  $r_V/r_{V'}$ , per cui per il lemma di Schwarz  $r_V \leq r_{V'}$ , e se  $r_V = r_{V'}$ , allora  $\phi_V = \phi_{V'}$ . Ponendo  $V' = V$ , si trova che  $\phi_V$  e  $r_V$  sono univocamente determinati da  $V$ .

Se  $V \in \mathcal{V}$ , e  $\{V_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ , è una successione in  $\mathcal{V}$  con  $V_n \supset V$  definitivamente,  $\phi_{V_n}$  non può tendere uniformemente a  $\infty$  sui compatti di  $\overset{\circ}{V} \setminus \{x_0, x_1\}$ ; se così fosse, poiché  $x_j, j = 0, 1$  ha un intorno compatto  $N_j$  in  $\overset{\circ}{V} \setminus \{x_{1-j}\}$ , sarebbe

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\phi_{V_n} - (1-j)} = 0$$

uniformemente in  $\partial N_j$ , da cui per il principio del massimo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\phi_{V_n}(x_j)} = 1 - j,$$

che è assurdo perché  $\phi_{V_n}(x_j) = j$ , e  $1 \neq 0 = j(1 - j)$ . Inoltre,  $\phi_{V_n}$  converge in  $\mathcal{H}(\overset{\circ}{V})$  se e solo se converge in  $\mathcal{H}(\overset{\circ}{V} \setminus \{x_0, x_1\})$ ; infatti, poiché per il principio del massimo l'equilimitatezza in  $\partial N_j$  implica l'equilimitatezza in  $N_j$ , l'equivalenza segue dal corollario 1.18. Quindi per il teorema 3.9 se  $V \in \mathcal{V}$ , da ogni successione  $\phi_{V_n}$ ,  $V_n \in \mathcal{V}$  tale che  $V_n \supset V$  definitivamente si può estrarre una sottosuccessione convergente in  $\mathcal{H}(\overset{\circ}{V})$ .

Sia  $(1, \infty] \ni r = \sup_{V \in \mathcal{V}} r_V$ ; per il teorema 3.8 esiste una successione  $\{V_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  in  $\mathcal{V}$  tale che  $V_{n+1}$  sia un intorno di  $V_n$  per ogni  $n$ , e  $\lim_{n \rightarrow \infty} r_{V_n} = r$ . Sia  $V_n^1 = V_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ; per  $k > 1$ , esiste  $V_n^k$  sottosuccessione di  $V_n^{k-1}$  tale che  $\phi_{V_n^k}$  sono definite in  $\overset{\circ}{V}_k$  e le restrizioni convergono in  $\mathcal{H}(\overset{\circ}{V}_k)$ . Sia

$$V = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} V_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \overset{\circ}{V}_n;$$

ogni compatto di  $V$  ammette un ricoprimento finito  $\overset{\circ}{V}_{n_1} \cup \dots \cup \overset{\circ}{V}_{n_l}$ , per cui è contenuto in  $V_{\max\{n_1, \dots, n_l\}}$ . Allora  $\phi_{V_n}$  è una successione di funzioni olomorfe che converge uniformemente sui compatti a una funzione  $\phi : V \rightarrow \overline{B(0, r)}$ . Questa funzione è olomorfa per la proposizione 1.14, e iniettiva perché per il lemma 1.24 lo è su ogni  $\overset{\circ}{V}_n$ , quindi è un biolomorfismo con l'immagine. Essendo aperta, assume valori in  $B(0, r)$ . Resta da verificare che  $\phi : V \rightarrow B(0, r)$  è suriettiva e che  $M = V$ . Ora,  $V$  è semplicemente connesso perché ogni laccio è contenuto in  $V_n$  per qualche  $n$ , e i  $V_n$  sono semplicemente connessi. Per il teorema 1.12,  $\phi(V) = \mathbb{C}$  oppure esiste  $\eta : V \rightarrow B(0, R)$  biolomorfismo, con  $R > 1$ ,  $\phi(x_0) = 0$ ,  $\phi(x_1) = 1$ . Nel secondo caso, non può essere  $r = +\infty$  o  $r > R$ : altrimenti si potrebbe scegliere  $V \in \mathcal{V}$  con  $r_V > R$ ; l'applicazione  $\eta \circ \phi_V^{-1}|_{B(0, R)}$  sarebbe allora un automorfismo di  $B(0, R)$  con 0, 1 punti fissi, per cui per il lemma di Schwarz sarebbe l'identità, che è assurdo perché  $\eta \circ \phi_V^{-1}$  è iniettiva in  $B(0, r_V)$ . Se  $r = +\infty$ , questo dimostra che  $\phi$  è suriettiva. Altrimenti, sia per assurdo  $r < R$ ; si ha  $V = \eta^{-1}(B(0, \frac{R+r}{2})) \in \mathcal{V}$ , con  $\phi_V = \eta|_V$ ,  $r_V = \frac{R+r}{2} > r$ , che è assurdo. Allora è  $r = R$ , per cui per il lemma di Schwarz  $\phi \circ \eta^{-1} : B(0, r) \rightarrow B(0, r)$  è l'identità, e dunque  $\phi = \eta$  è suriettiva.

Sia ora  $y \in M \setminus V$ ; per il teorema 3.8, si può costruire una successione  $V'_n$  in  $\mathcal{V}$  tale che  $V'_1 \supset V_1 \cup \{y\}$ ,  $V'_{n+1} \supset V_n \cup V'_n$ . Il limite  $\phi'$  della successione  $\phi_{V'_n}$  è un biolomorfismo di  $V' = \bigcup V'_n$  con l'immagine. Se  $r \in \mathbb{R}$ , per quanto dimostrato,  $\phi'(V') = \phi(V) = B(0, r)$ ; allora  $\phi' \circ \phi^{-1} : B(0, r) \rightarrow B(0, r)$  per il lemma di Schwarz è l'identità, che è assurdo perché  $\phi'(\phi^{-1}(B(0, r))) = \phi'(V) \not\supset \phi'(y)$ . Se  $r = +\infty$ , ancora per la prima parte della dimostrazione si ha che  $\phi'(V') = \phi(V) = \mathbb{C}$ ; quindi  $\phi' \circ \phi : \mathbb{C} \rightarrow \phi'(V) \neq \mathbb{C}$  è un biolomorfismo, da cui per il teorema 1.12 si ottiene un biolomorfismo di  $\mathbb{C}$  con  $D^2$ . Questo è assurdo, perché una mappa olomorfa limitata in  $\mathbb{C}$  si estende a una funzione olomorfa in  $S^2$  che quindi è costante. Dunque in entrambi i casi  $V = M$ .  $\square$

## Capitolo 4

# Altri modi di ottenere il caso compatto

Nel capitolo precedente si è visto come il teorema di uniformizzazione sia riducibile in modo “geometrico” al caso compatto del teorema medesimo, e quindi al teorema “elementare” dell’applicazione di Riemann dimostrato nel primo capitolo. Nel capitolo 2 abbiamo fornito, in particolare, una dimostrazione del teorema nel caso compatto, che è indipendente, e in qualche misura più semplice, rispetto ai casi non compatti. È comunque naturale chiedersi se esistano altre dimostrazioni del caso compatto, ed in particolare se ne esistano di tipo puramente “geometrico”. Nel primo paragrafo di questo capitolo si dimostra il caso compatto del teorema di uniformizzazione (nel seguito, teorema 3.1) come conseguenza dell’esistenza di forme differenziali meromorfe con opportune singolarità, che discende dal teorema 2.38. Successivamente, si descrive senza entrare nei dettagli un’altra possibile dimostrazione di questo fatto, anch’essa di natura analitica. Si enuncia poi il teorema di Riemann-Roch, che discende anch’esso dall’esistenza di forme differenziali meromorfe di un certo tipo, e si fa quindi vedere come il teorema 3.1 possa esserne dedotto. Nell’ultimo paragrafo si dà infine una dimostrazione puramente “geometrica” del caso compatto: alla fine il teorema generale di uniformizzazione sarà ridotto alla sua versione elementare, cioè al teorema dell’applicazione di Riemann.

### 4.1 La dimostrazione attraverso il teorema di Riemann-Roch

Lo scopo di questo paragrafo non è dare una dimostrazione completa del teorema di Riemann-Roch, ma di confrontare l’analisi che serve per dimostrarlo e quella che serve nella dimostrazione del capitolo 2, in vista del prossimo paragrafo

in cui sostanzialmente l'analisi non compare, se non nella forma del teorema dell'applicazione di Riemann.

**Definizione 4.1.** Una 1-forma meromorfa  $\omega$  su  $M$  è una 1-forma olomorfa su  $M \setminus \Delta$ , dove  $\Delta$  è discreto, tale che intorno a ogni  $x \in \Delta$  per qualche (e quindi per ogni) parametrizzazione  $\phi : (D^2, 0) \rightarrow (U, x)$  si ha  $\phi^*\omega = f dz$  in  $D^2 \setminus \{0\}$ , dove  $f$  si estende a una funzione meromorfa su  $D^2$ . Si scrive  $\text{ord}_x \omega = \text{ord}_x f$ .

Si può verificare che  $\text{ord}_x \omega$  è ben definita.

**Teorema 4.2.** Sia  $M$  compatta; sia  $\phi : (D^2, 0) \rightarrow (K, x)$  un disco conforme, e  $n$  un intero maggiore di 1. Allora esiste una unica 1-forma  $\omega$  meromorfa su  $M$ , olomorfa su  $M \setminus \{x\}$  e tale che  $\phi^*\omega - z^{-n} dz$  si estende a una 1-forma olomorfa su  $D^2$ .

*Dimostrazione.* Per il teorema 2.38 esiste una funzione  $u$  armonica in  $M \setminus \{x\}$  tale che

$$\phi^*u - \text{Re} \frac{z^{1-n}}{1-n}$$

è armonica in  $D^2$ ; allora  $\omega = du + i^* du$  è una forma olomorfa in  $M \setminus \{x\}$ , e

$$\begin{aligned} \phi^*\omega - z^{-n} dz &= d\phi^*u + i^*\phi^* du - d \frac{z^{1-n}}{1-n} = \\ d\phi^*u + i^*\phi^* du - d \text{Re} \frac{z^{1-n}}{1-n} - i^* d \text{Re} \frac{z^{1-n}}{1-n} &= \\ d \left( \phi^*u - \text{Re} \frac{z^{1-n}}{1-n} \right) + i^* d \left( \phi^*(u) - \text{Re} \frac{z^{1-n}}{1-n} \right) \end{aligned}$$

è un differenziale olomorfo.  $\square$

*Dimostrazione del teorema 3.1.* Sia  $M$  semplicemente connessa e compatta, e  $\omega$  una forma come nel teorema 4.2,  $n = 2$ . Allora  $\omega$  è il differenziale di una funzione meromorfa intorno a ogni punto, compreso  $x$  perché  $z^{-2} dz = -dz^{-1}$ . Una qualunque di queste funzioni individua una componente connessa  $g$  nel fascio dei germi delle funzioni meromorfe su  $M$ ; sia  $N$  la sua proiezione su  $M$ . Per quanto detto se  $y \in \overline{N}$ , allora un intorno di  $y$  è contenuto in  $N$ . Quindi  $N$  è aperto e chiuso, e  $g$  riveste  $M$ ; poiché  $M$  è semplicemente connesso,  $g$  individua una funzione meromorfa  $f$  su  $M$ . Si ha  $\omega = df$ , e  $\phi^*f + z^{-1}$  è olomorfa perché è la primitiva di una funzione olomorfa; allora  $f$  ha un polo semplice in  $x$ . Inoltre,  $f$  non può avere un polo in un punto  $y \neq x$  perché altrimenti  $\omega$  avrebbe un polo in  $y$ . Quindi  $f$ , vista come funzione olomorfa a valori in  $S^2$ , ha grado 1, ed è perciò iniettiva. È anche suriettiva perché  $f(M)$  è compatta e aperta, quindi è un biolomorfismo.  $\square$

Proponiamo ora una dimostrazione alternativa del teorema 4.2, seguendo [3]. Uno degli elementi fondamentali è la scomposizione ortogonale dello spazio di Hilbert delle 1-forme a quadrato sommabile (corollario 4.13); per definirlo,

occorre introdurre le forme differenziali a coefficienti misurabili. Per motivi tecnici, ma anche perché dal teorema 4.2 segue l'esistenza di funzioni meromorfe non costanti, che è interessante di per sé, non si supponrà  $M$  compatta; per semplicità però si assumerà che  $M$  sia a base numerabile. Per quanto riguarda la dimostrazione del teorema 4.2, occorrerà considerare  $M$  compatta o  $M$  aperto di un compatto, e quindi in questi casi è lecito supporre che  $M$  sia a base numerabile.

**Definizione 4.3.** Una 1-forma (differenziale) reale  $\omega$  è una sezione del fibrato cotangente di  $M$  (qui senza condizioni di regolarità); una 1-forma (differenziale) è una  $\omega_1 + i\omega_2$  dove  $\omega_1$  e  $\omega_2$  sono 1-forme reali. A parte la differenziazione e l'integrazione, si estendono a questa definizione di forma differenziale le definizioni e le notazioni introdotte all'inizio del capitolo 1.

Inoltre, per una 1-forma  $\omega$  si può definire  $\bar{\omega}$  in modo che per ogni disco conforme  $\phi: D^2 \rightarrow K$ , se  $\phi^*\omega = fdz + g\bar{d}z$  allora  $\phi^*\bar{\omega} = \bar{f}d\bar{z} + \bar{g}dz$ .

Un calcolo immediato dimostra che  $d\bar{f} = \overline{df}$  per ogni  $f \in C^1(M, \mathbb{C})$  e che  ${}^*\bar{\omega} = \overline{{}^*\omega}$  per ogni 1-forma  $\omega$ .

Per quanto riguarda la differenziazione, si dà la seguente

**Definizione 4.4.** Sia  $\omega$  una 1-forma. Si dice che  $\omega$  è di classe  $C^k$  se per ogni disco conforme  $\phi: D^2 \rightarrow K$   $\phi^*\omega = fdz + g\bar{d}z$  con  $f, g \in C^k(D^2)$ . Per forme di classe  $C^1$ , si definisce l'operatore  $d$  in modo usuale.

Per quanto riguarda l'integrazione, si può osservare che su  $M$  non è in generale definita una misura; si può dire però che un insieme  $X$  è trascurabile se preso un ricoprimento di  $M$  con aperti coordinati  $\{U_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ,  $X \cap U_n$  corrisponde, mediante la parametrizzazione di  $U_n$ , a un insieme trascurabile di  $\mathbb{C}$ . Poiché un diffeomorfismo di aperti del piano manda insiemi trascurabili in insiemi trascurabili, si ha la buona definizione.

Inoltre, poiché ogni aperto di  $M$  è paracompatto, si può definire l'integrazione delle forme mediante le partizioni dell'unità.

**Definizione 4.5.** Se  $\omega$  è una 1-forma differenziale, si dice che è misurabile se, per ogni disco conforme  $\phi: D^2 \rightarrow K \subset M$ ,  $\phi^*\omega = fdz + g\bar{d}z$ , con  $f, g: D^2 \rightarrow \mathbb{C}$  misurabili. Si definisce lo spazio delle 1-forme a quadrato sommabile  $L^2(M)$  come l'insieme di tutte le 1-forme misurabili tali che  $\omega \wedge {}^*\bar{\omega}$  ha integrale finito su  $M$ , quozientato per la relazione di equivalenza  $\sim$  definita da:  $\alpha \sim \beta$  se e solo se  $\alpha = \beta$  quasi ovunque. Per  $\alpha, \beta \in L^2(M)$ , si pone  $\langle \alpha, \beta \rangle = \int_M \alpha \wedge {}^*\bar{\beta}$ , e  $\|\alpha\| = \langle \alpha, \alpha \rangle$ .

**Proposizione 4.6.**  $\langle, \rangle$  è un prodotto scalare su  $L^2(M)$  che lo rende uno spazio di Hilbert complesso, per cui l'operatore  ${}^*$  è un'isometria.

*Dimostrazione.* In un disco conforme  $\phi : D^2 \rightarrow K$ , se  $\phi^*\alpha_1 = f_1dx + g_1dy$  e  $\phi^*\alpha_2 = f_2dx + g_2dy$ ,

$$\begin{aligned} \int_{D^2} \phi^*\alpha_1 \wedge *(\phi^*\overline{\alpha_2}) &= \int_{D^2} (f_1dx + g_1dy) \wedge *(\overline{f_2}dx + \overline{g_2}dy) = \\ &= \int_{D^2} (f_1dx + g_1dy) \wedge (\overline{f_2}dy - \overline{g_2}dx) = \\ &= \int_{D^2} (f_1\overline{f_2} + g_1\overline{g_2}) dx \wedge dy. \end{aligned}$$

Da questa equazione si vede che  $\langle, \rangle$  è una forma hermitiana, che una successione  $\alpha_n$  in  $L^2(M)$  tende a un limite  $\alpha$  se e solo se  $\alpha_n|_K \rightarrow \alpha|_K$  in  $L^2(K)$  per ogni  $K$ , che una forma  $\alpha \in L^2(M)$  con  $\|\alpha\| = 0$  è nulla quasi ovunque e inoltre che se  $\alpha_n$  è di Cauchy,  $\alpha_n|_K$  ha un limite  $\alpha_K \in L^2(K)$ . Per l'unicità del limite, le forme  $\alpha_K$  coincidono sull'intersezione e quindi definiscono una 1-forma  $\alpha$ , che è limite in  $L^2(M)$  di  $\alpha_n$  (perché il ricoprimento di  $M$  dato dai dischi conformi ammette un sottoricoprimento numerabile).

Siano  $\alpha, \beta \in L^2(M)$ . Allora dall'espressione esplicita di  $\langle \phi^*\alpha, \phi^*\beta \rangle$  si vede che  $\langle *\alpha, *\beta \rangle = \langle \alpha, \beta \rangle$ .  $\square$

**Definizione 4.7.** Sia  $E$  la chiusura in  $L^2(M)$  di

$$\{df \mid f \in C^\infty(M, \mathbb{C}), f \text{ a supporto compatto}\}.$$

Sia  $E^* = \{*\omega \mid \omega \in E\}$ . Si indicheranno con  $E^\perp$  e  $E^{*\perp}$  gli spazi ortogonali per il prodotto scalare sopra definito.

**Proposizione 4.8.** Sia  $\alpha \in L^2(M)$  di classe  $C^1$ . Allora  $\alpha$  è chiusa se e solo se  $\alpha \in E^{*\perp}$ ;  $*\alpha$  è chiusa se e solo se  $\alpha \in E^\perp$ .

*Dimostrazione.* Sia  $f \in C^\infty(M)$ , con supporto contenuto in una sottosuperficie differenziabile compatta  $D$  di  $M$  (tutte le  $f$  a supporto compatto sono di questo tipo per il lemma 3.3). Allora

$$\begin{aligned} \langle *\alpha, df \rangle &= \langle -\alpha, *df \rangle = \int_D \alpha \wedge \overline{df} = - \int_D \overline{df} \wedge \alpha = \\ &= - \int_D (d(\overline{f}\alpha)) - \overline{f}d\alpha = \int_D \overline{f}d\alpha \end{aligned}$$

per la formula di Stokes; quindi  $d\alpha = 0$  se e solo se  $0 = \langle *\alpha, df \rangle = \langle -\alpha, *df \rangle = 0$  per ogni  $f \in C^\infty(M)$ , ossia  $\alpha \in E^{*\perp}$ . Sostituendo  $\alpha$  con  $*\alpha$ , si trova che  $*\alpha$  è chiusa se solo se  $\langle \alpha, df \rangle = 0$  per ogni  $f$  come sopra, ossia  $\alpha \in E^\perp$ .  $\square$

**Definizione 4.9.** Sia  $f : M \rightarrow \mathbb{C}$ ; si dice che  $f$  è armonica se esiste una funzione armonica  $f_0 \in C^2(M, \mathbb{C})$  tale che  $f = f_0$  quasi ovunque e  $\Delta f_0 = 0$ . Se  $\omega \in L^2(M)$ , si dice che  $\omega$  è armonica se per ogni disco conforme  $\phi : D^2 \rightarrow K \subset M$ ,  $\phi^*\omega = df_K$  quasi ovunque, con  $f_K : D^2 \rightarrow \mathbb{C}$  armonica. Lo spazio delle 1-forme armoniche a quadrato sommabile verrà indicato con  $H$ .

**Teorema 4.10 (Lemma di Weyl).** Sia  $\phi : D^2 \rightarrow \mathbb{C}$  misurabile e a quadrato sommabile. Allora  $\phi$  è armonica se e solo se

$$\int_{D^2} \phi \Delta \eta = 0$$

per ogni  $\eta \in C^\infty(D^2)$  a supporto compatto.

Si può osservare che il “solo se” discende subito dall’equazione 2.3, che vale anche per funzioni complesse. Per una dimostrazione del teorema, si rimanda comunque a [3].

**Lemma 4.11.**  $H = \{\omega \in L^2(M) \mid \omega \text{ è di classe } C^1, d\omega = 0, d^*\omega = 0\}$

*Dimostrazione.* Sia  $\omega$  come nell’enunciato; allora per qualche disco conforme  $\phi : D^2 \rightarrow K$ ,  $\phi^*\omega = df$  con  $f \in C^2(M, \mathbb{C})$ , e  $d^*df = 0$ .

Viceversa, se  $\omega \in H$  allora è di classe  $C^1$ ; in un disco conforme  $\phi : D^2 \rightarrow K$ ,  $\phi^*\omega = df_K$ , e  $d^*df_K = 0$ , per cui  $d\omega|_K = 0 = d^*\omega|_K$  per ogni  $K$ .  $\square$

**Teorema 4.12.**  $H = E^\perp \cap E^{*\perp}$

*Dimostrazione.* Se  $\omega \in H$ , per il lemma  $\omega$  e  $^*\omega$  sono chiuse; per la proposizione 4.8,  $\omega \in E^\perp \cap E^{*\perp}$ .

Viceversa, sia  $\omega \in E^\perp \cap E^{*\perp}$ ; sia poi  $\phi : D^2 \rightarrow K \subset M$  un disco conforme, e sia  $\eta \in C^\infty(M)$  con supporto contenuto in  $K$ . Allora  $\frac{\partial \phi^*\eta}{\partial x}$  e  $\frac{\partial \phi^*\eta}{\partial y}$  si annullano in un intorno del bordo di  $D^2$ , per cui esistono due funzioni  $\eta_1$  ed  $\eta_2$  in  $C^\infty(M)$  tali che  $\phi^*\eta_1 = \frac{\partial \phi^*\eta}{\partial x}$  e  $\phi^*\eta_2 = \frac{\partial \phi^*\eta}{\partial y}$ . Sia  $\phi^*\omega = f dx + g dy$ ; allora

$$0 = \langle \omega, d\eta_1 \rangle = \int_{D^2} \left( f \frac{\partial^2 \phi^*\eta}{\partial x^2} + g \frac{\partial^2 \phi^*\eta}{\partial x \partial y} \right) dx \wedge dy \quad (4.1)$$

$$0 = \langle \omega, ^*d\eta_2 \rangle = \int_{D^2} \left( -f \frac{\partial^2 \phi^*\eta}{\partial y^2} + g \frac{\partial^2 \phi^*\eta}{\partial y \partial x} \right) dx \wedge dy \quad (4.2)$$

da cui, sottraendo,

$$0 = \int_{D^2} \left( f \frac{\partial^2 \phi^*\eta}{\partial x^2} + f \frac{\partial^2 \phi^*\eta}{\partial y^2} \right) dx \wedge dy .$$

Per il teorema 4.10,  $f$  è armonica; sostituendo  $\omega$  con  $^*\omega$  si trova che anche  $g$  è armonica. Quindi  $\omega$  è di classe  $C^1$ ; per il lemma, è armonica.  $\square$

**Corollario 4.13.**  $L^2(M) = E \oplus E^* \oplus H$

*Dimostrazione.* Per la proposizione 4.8, ogni  $\alpha \in E$ , essendo chiusa, è in  $E^{*\perp}$ ; quindi  $E$  e  $E^*$  sono ortogonali. Lo spazio chiuso  $E \oplus E^* \subset L^2(M)$  ha un ortogonale  $(E \oplus E^*)^\perp = E^\perp \cap E^{*\perp} = H$ .  $\square$

*Schema della dimostrazione del teorema 4.2.* Sia  $h : M \rightarrow \mathbb{C}$  tale che

$$\phi^*h(z) = \frac{z^{1-n} + \bar{z}^{n-1}}{1-n}$$

e  $h \equiv 0$  in  $M \setminus K$ . Sia  $D = \phi(B(0, 1/2))$ , e sia  $\theta : M \rightarrow \mathbb{C}$  tale che  $\theta|_{M \setminus D} = h|_{M \setminus D}$ , e  $\mathcal{C}^\infty$  su  $K$ . Poiché  $\theta$  è differenziabile quasi ovunque, si può definire  $d\theta \in L^2(M)$ . Per il corollario 4.13,  $d\theta = \alpha + \omega$  dove  $\alpha \in E$  e  $\omega \in E^* \oplus H$ ; si dimostra che  $\alpha$  è armonica in  $M \setminus D$ . Sia  $\eta : M \rightarrow \mathbb{R}$  con supporto contenuto in  $K$ . Ora,  $d\theta$  è chiusa in  $K$ , quindi si può applicare la proposizione 4.8 alla superficie di Riemann  $K$ , e ottenere l'analogo dell'equazione 4.2. Procedendo in modo simile alla dimostrazione del teorema 4.12, si trova che  $\alpha \in \mathcal{C}^\infty$  in  $K$ . Inoltre  $\alpha \in E^{*\perp}$ , quindi per la proposizione 4.8 si ha  $d\alpha = 0$ . Poiché  $\omega = d\theta - \alpha$ ,  $\omega$  è  $\mathcal{C}^\infty$  su  $K$ ; inoltre  $\omega \in E^\perp$ . Quindi restringendosi alla superficie di Riemann  $K$ , per la proposizione 4.8,  $^*\omega$  è chiusa; poiché  $d\omega = 0$ ,  $\omega$  è armonica in  $K \setminus \{x\}$ . La forma  $dh - \omega$  è quindi armonica in  $K \setminus \{x\}$ ; lo è anche in  $M \setminus D$  perché vi coincide con  $\alpha$ . La forma  $dh - \omega + i^*(dh - \omega)$  soddisfa la tesi.  $\square$

Per una dimostrazione completa si rimanda a [3]; si osservi tuttavia che si è applicato due volte la proposizione 4.8 alla superficie di Riemann  $K$ , che non è compatta; questo spiega perché non si è supposto  $M$  compatta fin dall'inizio. Il confronto tra le due dimostrazioni del teorema può essere significativo perché esse rappresentano la parte analitica di due diverse dimostrazioni del caso compatto del teorema di uniformizzazione. In un certo senso, la prima è più elementare perché non fa uso di nozioni come lo spazio  $L^2(M)$ ; d'altra parte, vi svolge un ruolo essenziale il teorema di esistenza della soluzione al problema di Dirichlet, e quindi anche il metodo di Perron, laddove la seconda usa solo il lemma di Weyl. Inoltre, la seconda è più generale perché si può applicare anche alle superfici iperboliche nel senso della definizione 2.32.

Si osservi che dal teorema 4.2, comunque lo si dimostri, segue subito l'esistenza di funzioni meromorfe non costanti per superfici compatte (anche non semplicemente connesse). Infatti, il "rapporto" di due forme meromorfe è una funzione meromorfa; se tutte le funzioni meromorfe così ottenute fossero costanti, si avrebbe che tutte le forme meromorfe sono proporzionali, che contraddice il fatto che per ogni  $x$  esista una  $\omega$  con un polo in  $x$ . Valgono quindi il teorema 2.45 e il corollario 2.46. Per la classificazione delle superfici compatte orientabili e triangolabili, ogni superficie di Riemann compatta è omeomorfa a una superficie di genere  $g$ , dove  $g$  è un intero non negativo (quindi il teorema 3.1 è equivalente a dimostrare che  $S^2$  ha un'unica struttura conforme), rappresentata dal simbolo  $a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \dots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1}$ . Si può allora dimostrare che a meno di sommare un'opportuna forma olomorfa, si può supporre che la forma della tesi del teorema 2.45 abbia periodi  $a$  nulli (ossia  $\int_{a_i} \omega = 0$  per ogni  $i = 1, \dots, g$ ). Questo fatto permette di dimostrare il teorema di Riemann-Roch; si vedrà che nel caso semplicemente connesso, ossia  $g = 0$ , esso implica l'esistenza di una funzione meromorfa con un solo polo, semplice. Quindi una volta ottenuto il teorema 4.2 ci sono due strade per dimostrare il teorema 3.1: una diretta (che è stata data

all'inizio di questo paragrafo), l'altra attraverso il teorema di Riemann-Roch. Poiché il teorema di Riemann-Roch è importante di per sè, può valere la pena di enunciarlo senza dimostrazione e dedurne il 3.1. Occorre premettere alcune definizioni.

**Definizione 4.14.** *Sia  $M$  compatta; il gruppo dei divisori su  $M$  è*

$$\left\{ \sum_{i=1}^n a_i x_i \mid n \in \mathbb{N}, a_i \in \mathbb{Z}, x_i \in M \right\} .$$

*Si definisce un omomorfismo dal gruppo dei divisori in  $\mathbb{Z}$  definito da*

$$\deg \left( \sum_{i=1}^n a_i x_i \right) = \sum_{i=1}^n a_i .$$

*Se  $f$  è una funzione meromorfa su  $M$ , si definisce  $(f) = \sum_{x \in M} (\text{ord}_x f)x$ ; si ottiene così un omomorfismo dal gruppo moltiplicativo delle funzioni meromorfe nel gruppo dei divisori. La stessa definizione si dà per le 1-forme meromorfe. Sul gruppo dei divisori, si definisce un ordinamento parziale ponendo*

$$\sum_{x \in M} a_x x \leq \sum_{x \in M} b_x x \iff a_x \leq b_x \quad \forall x \in M .$$

*Se  $f, g$  sono funzioni meromorfe, vale  $(fg) = (f) + (g)$ ; se  $\omega$  è una 1-forma meromorfa, vale  $(f\omega) = (f) + (\omega)$ .*

*Se  $f$  è una funzione meromorfa, e  $\phi^* f = f_\phi dz$ , con  $\phi : (U, 0) \rightarrow (V, x)$  parametrizzazione, allora dalla definizione 1.20 si vede che  $\text{Res}_0 f_\phi$  non dipende da  $\phi$ ; si può quindi porre  $\text{Res}_x f = \text{Res}_0 f_\phi$ . Si vede quindi che il teorema 1.22 vale anche per una superficie di Riemann  $M$ ; in particolare, se  $M$  è compatta, ogni funzione meromorfa  $f$  ha  $\deg(f) = 0$ . In altri termini,*

$$\{(f) \mid f \text{ meromorfa su } M\} \subset \ker \deg .$$

**Definizione 4.15.** *Si dice che due divisori  $D, D'$  sono linearmente equivalenti se  $D = D' + (f)$  con  $f$  meromorfa su  $M$ . Lo spazio vettoriale complesso delle funzioni meromorfe  $f$  su  $M$  tali che  $(f) + D \geq 0$  verrà indicato con  $\mathcal{L}(D)$ , e si scriverà  $l(d) = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{L}(D)$ .*

Quindi  $\deg D$  e  $l(D)$  dipendono solo dalla classe di equivalenza di  $D$ . Per il teorema 4.2), esiste una 1-forma meromorfa non costante  $\eta$ . Due tali forme hanno per rapporto una funzione meromorfa, e hanno quindi divisori linearmente equivalenti.

**Teorema 4.16 (Riemann-Roch).** *Sia  $M$  una superficie di Riemann compatta,  $D$  un divisore su  $M$ , e  $K = (\eta)$  dove  $\eta$  è una 1-forma meromorfa non costante su  $M$ . Allora*

$$l(D) - l(K - D) = \deg D - g + 1 . \tag{4.3}$$

Nel caso semplicemente connesso, ossia,  $g = 0$ , sia  $D = \{x\}$ ; il teorema dà  $l(D) \geq 2$ , perciò esiste una funzione meromorfa con un solo polo, semplice, in  $x$ . Da qui si può procedere come all'inizio del paragrafo, e dimostrare il caso compatto del teorema di uniformizzazione.

## 4.2 La dimostrazione di Demailly

La dimostrazione proposta in questo paragrafo è dovuta a Demailly e ha carattere geometrico. Questo paragrafo non è indipendente dal capitolo precedente, in cui il teorema 3.1 veniva assunto; tuttavia, l'unico punto in cui lo si usava è nella dimostrazione del teorema 3.8. La costruzione del doppio di Klein e il teorema di Montel, in particolare, non dipendono da questo teorema, e potranno quindi essere usati nel seguito. Inoltre si osservi che nel caso compatto la paracompattatezza dei sottospazi è automatica. In tutto il paragrafo,  $M$  indica una superficie di Riemann compatta e semplicemente connessa.

**Definizione 4.17.** *Un aperto  $U \subset M$  si dice standard se le componenti connesse di  $U$  sono biolomorfe a  $S^2$  oppure a  $D^2$ .*

In particolare, l'insieme vuoto è standard. Nelle ipotesi fatte su  $M$ , se  $U \neq M$  allora  $U$  è l'unione di dischi conformi.

Una superficie compatta può essere ricoperta con un numero finito di aperti standard; tuttavia l'unione finita di aperti standard non è in generale standard. Si dà quindi la seguente generalizzazione:

**Definizione 4.18.** *Un poligono analitico è un aperto  $U = \overset{\circ}{\bar{U}} \subset M$ , tale che  $\partial U$  è unione finita di archi analitici, e ogni punto di  $\partial U$  è estremo di un numero pari di archi. I punti di intersezione di due o più archi si dicono vertici. Un poligono analitico si dice semplice se è connesso ed il suo bordo è una curva di Jordan.*

La condizione  $U = \overset{\circ}{\bar{U}} \subset M$  permette di escludere casi degeneri del tipo  $M \setminus \gamma$ , dove  $\gamma$  è un arco analitico, e in particolare  $M \setminus \{x\}$ . Quindi un poligono analitico semplice in  $S^2$  per il teorema dell'applicazione di Riemann è standard; non è in generale un disco conforme, se i suoi vertici non sono "eliminabili", perché un disco conforme ha bordo analitico.

La costruzione del doppio di Klein può essere estesa ai poligoni analitici.

**Definizione 4.19.** *Sia  $\Omega \subset M$  un poligono analitico e sia  $\beta$  un arco di Jordan contenuto in  $\partial\Omega$ . Allora il doppio di  $\Omega$  su  $\beta$  è una terna  $(D_\beta\Omega, i, \sigma)$  dove  $D_\beta\Omega$  è una superficie di Riemann,  $i : \Omega \cup \beta \rightarrow D_\beta\Omega$  è un omeomorfismo con l'immagine, olomorfo in  $\Omega$ , e  $\sigma : D_\beta\Omega \rightarrow D_\beta\Omega$  è un diffeomorfismo antiolomorfo con luogo di punti fissi  $i(\beta)$  tale che  $\sigma^2$  è l'identità e  $\sigma(i(\Omega)) \cup i(\Omega) = D_\beta\Omega$ .*

Si può costruire  $D_\beta\Omega$  come il doppio  $DU$  di  $U = \Omega \cup \beta$ ; per la dimostrazione della proposizione 3.7, che vale per sottovarietà topologiche,  $DU$  è una superficie di Riemann e soddisfa la definizione.

**Lemma 4.20.** *Sia  $\Omega$  un poligono analitico semplice,  $\phi : \Omega \rightarrow D^2$  un biolomorfismo. Allora  $\phi$  si estende a un omeomorfismo  $\tilde{\phi} : \overline{\Omega} \rightarrow D^2$ .*

*Dimostrazione.* Sia  $\Delta \subset \partial\Omega$  l'insieme dei vertici. Per il principio di riflessione, l'estensione è definita in modo unico intorno a ogni punto di  $\partial\Omega \setminus \Delta$ . Se  $x \in \Delta$ ,  $x = \beta_1 \cap \beta_2$  dove i  $\beta_i$  sono archi analitici in  $\partial\Omega$ ; se  $K$  è un disco conforme intorno a  $x$ ,  $K \cap \Omega$  è ancora un poligono analitico; per il teorema 1.38,  $\phi : K \cap \Omega \rightarrow D^2$  si estende al bordo. Le estensioni di  $\phi$  così ottenute coincidono nelle intersezioni dei domini di definizione per l'unicità dell'estensione. Si ottiene così un omeomorfismo locale  $\tilde{\phi} : \overline{\Omega} \rightarrow D^2$ . Siano  $x_1, x_2$  due punti distinti di  $\overline{\Omega}$ , tali che  $\tilde{\phi}(x_1) = \tilde{\phi}(x_2) = y$ ; poiché  $\tilde{\phi}$  è un omeomorfismo locale, esiste un intorno  $N$  di  $y$  in  $D^2$  e un intorno  $U_i$  di  $x_i$  in  $\overline{\Omega}$ , per  $i = 1, 2$ , tali che  $\tilde{\phi}|_{U_i} : U_i \rightarrow N$  sia un omeomorfismo; si può supporre che  $U_1$  e  $U_2$  non si intersechino. Allora  $\tilde{\phi}(U_1 \cap \Omega)$  e  $\tilde{\phi}(U_2 \cap \Omega)$  si intersecano, perché

$$\tilde{\phi}(U_i \cap \Omega) = \tilde{\phi}(U_i) \cap D^2 = N \cap D^2 \neq \emptyset,$$

contraddicendo l'iniettività di  $\phi$ ; dunque  $\tilde{\phi}$  è iniettiva. Poiché  $\overline{\Omega} \subset M$  è compatto, e  $\tilde{\phi}$  è un omeomorfismo locale,  $\tilde{\phi}(\overline{\Omega})$  è aperto e chiuso e quindi  $\tilde{\phi}$  è un omeomorfismo.  $\square$

**Proposizione 4.21.** *Per ogni  $\Omega$  poligono analitico semplice standard, e  $\beta$  arco di Jordan contenuto in  $\partial\Omega$ , se  $\partial\Omega \setminus \beta$  contiene più di un punto allora  $D_\beta\Omega$  è standard.*

*Dimostrazione.* Esiste un biolomorfismo  $\phi : \Omega \rightarrow D^2$  che si estende a un omeomorfismo  $\tilde{\phi} : \overline{\Omega} \rightarrow D^2$  (lemma 4.20). Sia  $U = \Omega \cup \beta$ ; allora  $D^2 \setminus \tilde{\phi}(U)$  contiene almeno due punti; quindi componendo con un opportuno biolomorfismo tra il disco e il semipiano, che si estende alle chiusure, si ottiene un embedding non suriettivo  $\psi : U \rightarrow \mathbb{H}^2$ . Allora  $\psi$  si estende a un embedding non suriettivo di  $DU$  in  $\mathbb{C}$ . Poiché  $\beta$  è connesso per archi e  $\Omega$  è semplicemente connesso, per il teorema di Van Kampen  $DU = D_\beta\Omega$  è semplicemente connesso, e di conseguenza per il teorema dell'applicazione di Riemann  $D_\beta\Omega$  è biolomorfo al disco.  $\square$

**Teorema 4.22.** *Se  $M = U \cup V$  dove  $U$  e  $V$  sono aperti biolomorfi a  $D^2$ , allora  $M$  è biolomorfa a  $S^2$ .*

*Dimostrazione.* Poiché  $U$  non è compatto,  $U \neq M$ . Sia  $\phi : D^2 \rightarrow U$  un biolomorfismo, e per  $r \in [0, 1]$ ,  $U_r = \phi(B(0, r))$ ; allora  $M \setminus \overline{U_r}$  è un aperto semplicemente connesso non vuoto. Sia

$$R = \{r \in [0, 1] \mid \exists \psi_r : M \setminus \overline{U_r} \rightarrow \overline{D^2} \text{ omeomorfismo con } \psi_r|_{M \setminus \overline{U_r}} \text{ olomorfa} \}.$$

Il compatto  $M \setminus V$  è ricoperto da  $\{U_r\}_{r \in (0,1)}$ ; quindi  $M \setminus V \subset U_r$  per qualche  $r$ . Allora  $M \setminus \overline{U_r} \subset V$  è un aperto di  $V$ , il cui bordo  $\partial U_r$  è una curva di Jordan analitica, per cui per il teorema dell'applicazione di Riemann è biolomorfa a  $D^2$ , e per il principio di riflessione il biolomorfismo si estende a un omeomorfismo delle chiusure. Ne segue che  $R \neq \emptyset$ .

Inoltre,  $r \in R$  implica  $r^2 + \epsilon \in R$  per ogni  $\epsilon > 0$ . Infatti per il principio di riflessione, applicato a  $\psi_r|_{U \setminus U_r}$ ,  $\psi_r : M \setminus U_r \rightarrow D^2$  si estende a un embedding  $\tilde{\psi} : M \setminus \overline{U_{r^2}} \rightarrow \mathbb{C}$ . Il teorema 1.38 non può essere applicato a  $M \setminus U_{r^2}$ , ma avendo l'embedding in  $\mathbb{C}$ , può essere applicato a ogni  $M \setminus U_{r^2+\epsilon}$ . La mappa  $\tilde{\psi}|_{M \setminus \overline{U_{r^2+\epsilon}}}$ , essendo la restrizione di una mappa iniettiva, non è suriettiva. Inoltre  $M \setminus \overline{U_{r^2+\epsilon}}$  è otopologicamente equivalente a  $M \setminus \overline{U_r}$  perché  $\partial U_r$  è un retratto di deformazione di  $\overline{U_r} \setminus \overline{U_{r^2+\epsilon}}$ ; quindi  $M \setminus \overline{U_{r^2+\epsilon}}$  è semplicemente connesso perché, essendo  $r \in R$ ,  $M \setminus \overline{U_r}$  lo è. Dunque la sua immagine è un aperto di  $\mathbb{C}$  semplicemente connesso e quindi biolomorfo a  $D^2$  per il teorema dell'applicazione di Riemann. Per il teorema 1.38, il biolomorfismo si estende alla mappa  $\psi_{r^2+\epsilon}$  cercata.

Quindi  $R$  contiene una successione  $r_n$  che tende a 0. Procedendo come nella dimostrazione del teorema 3.10, si trova un biolomorfismo

$$w : \bigcup_{n \in \mathbb{N}} M \setminus \overline{U_{r_n}} = M \setminus \{\phi(0)\} \rightarrow W \subset \mathbb{C}.$$

Per il teorema di Picard la mappa  $w$ , essendo iniettiva, non può avere una singolarità essenziale in  $\phi(0)$ , quindi si estende a una funzione meromorfa  $\tilde{w} : M \rightarrow S^2$ . Allora  $\tilde{w}(M)$  è compatto e aperto, per cui  $\tilde{w}$  è suriettiva.  $\square$

**Proposizione 4.23.** *Sia  $\gamma$  una curva di Jordan chiusa in  $M$ . Allora  $M \setminus \gamma$  ha due componenti connesse.*

*Dimostrazione.* Si veda la dimostrazione del corollario 3.5.  $\square$

**Lemma 4.24.** *Sia  $\Omega \subset M$  un poligono analitico semplice tale che  $M \setminus \overline{\Omega}$  è connesso; sia  $\{K_i, K'_j \mid i = 1, \dots, k, j = 1, \dots, k'\}$  un ricoprimento di  $\overline{\Omega}$  tale che*

- $i K_i$  e  $i K'_j$  sono dischi conformi;
- $i K_i$  sono tra loro disgiunti e  $i K'_j$  sono tra loro disgiunti;
- il ricoprimento è minimale nel senso che non ammette sottoricoprimenti propri di  $\overline{\Omega}$ ;
- le chiusure  $\beta_i$  delle componenti connesse di  $\partial K_i \cap \Omega$  e  $\partial K'_j \cap \Omega$  sono disgiunte e in numero finito  $m$ .

Allora  $\Omega$  è standard.

*Dimostrazione.* Si può supporre che ogni  $\beta_l$  congiunga due punti del bordo di  $\Omega$ . Infatti, i  $\beta_l$  sono analitici, e quindi  $\beta_l \cap \partial\Omega$  è vuoto oppure è costituito da due punti. Nel primo caso,  $\beta_l = \partial K_i$  per qualche  $i$ ; allora  $\beta_l$  è contenuto in  $\bigcup_j K'_j$  perché non interseca nessun  $K_i$  e  $\{K_i, K'_j \mid i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, m'\}$  è un ricoprimento di  $\overline{\Omega} \supset \beta_l$ , e quindi  $\beta_l \subset K'_j$  per qualche  $j$ . Non può essere  $K_i \subset K'_j$  perché il ricoprimento è minimale. Allora  $K_i$  interseca  $\partial K'_j$ ; poiché per ipotesi  $\emptyset = (\partial K_i \cap \Omega) \cap (\partial K'_j \cap \Omega) = \partial K_i \cap \partial K'_j$  si ottiene  $K_i \supset \partial K'_j$ . Quindi  $K_i \cup K'_j$  è aperto e chiuso per cui (teorema 4.22) è biolomorfo a  $S^2$ . L'immagine di  $\Omega$  per tale biolomorfismo è un poligono analitico in  $S^2$  il cui complementare è non vuoto perché  $\partial\Omega$  è non vuoto e per la definizione di poligono analitico. Quindi per il teorema dell'applicazione di Riemann  $\Omega$  è biolomorfo a  $D^2$ .

Altrimenti, ogni  $\beta_l$  congiunge due punti del bordo di  $\Omega$ , e può essere completato in due modi distinti a una curva di Jordan chiusa, aggiungendo un arco di  $\partial\Omega$ ; siano  $\gamma_1, \gamma_2$  le curve così ottenute. Per la proposizione 4.23, ogni  $\gamma_j$  divide  $M$  in due poligoni analitici semplici, uno dei quali è contenuto in  $\Omega$  e sarà indicato con  $\Omega_j$ . La chiusura di  $\Omega_j$  in  $\Omega$  è data da  $\Omega_j \cup (\gamma_j \cap \Omega) = \Omega_j \cup (\beta_l \cap \Omega)$ . Allora  $\Omega_j \cup (\beta_l \cap \Omega) \cup \Omega_{3-j}$  è aperto e chiuso in  $\Omega$  e quindi coincide con  $\Omega$ . Si ottiene così che  $\beta_l$  divide  $\Omega$  in due poligoni analitici semplici connessi.

Si procede per induzione su  $m$ . Se  $\partial\Omega$  non è contenuto in un aperto del ricoprimento  $\{K_i, K'_j\}$ , si ha  $m \geq 2$ . Quindi, nel caso  $m \leq 1$ ,  $\Omega$  è contenuto in un disco conforme e quindi è biolomorfo a  $D^2$  per il teorema dell'applicazione di Riemann. Altrimenti, esistono due archi distinti  $\beta_1, \beta_2$ . Poiché  $\beta_1 \cap \beta_2 = \emptyset$ , uno dei due poligoni analitici in cui  $\beta_1$  divide  $\Omega$  contiene  $\beta_2$ ; esso verrà indicato con  $\Omega'$ . Ora,  $M \setminus \overline{\Omega'}$  è connesso perché è l'unione dei due connessi non disgiunti  $M \setminus \overline{\Omega} \cup (\partial\Omega \setminus \partial\Omega')$  e  $\overline{\Omega} \setminus \overline{\Omega'}$ . Quindi a meno di estrarre un sottoricoprimento minimale di  $\Omega'$  dal ricoprimento  $\{K_i, K'_j\}$ ,  $\Omega'$  soddisfa le ipotesi dell'enunciato, e gli archi  $\beta_j$  in questo caso sono al più  $m - 1$ . Per ipotesi induttiva, si ha  $\Omega'$  biolomorfo a  $D^2$ . Scambiando i ruoli di  $\beta_1$  e  $\beta_2$ , si costruisce  $\Omega''$  biolomorfo a  $D^2$ .

Ora,  $D_{\partial\Omega}\Omega$  è unione di due aperti biolomorfi rispettivamente a  $D_{\partial\Omega' \setminus \beta_1}\Omega'$  e  $D_{\partial\Omega'' \setminus \beta_2}\Omega''$ . Per la proposizione 4.21 e il teorema 4.22,  $D\Omega$  è biolomorfo a  $S^2$  e quindi per il teorema dell'applicazione di Riemann si ha la tesi.  $\square$

**Teorema 4.25.** *Siano  $U, U'$  due aperti standard di  $M$ ; sia  $\Omega \subset \overline{\Omega} \subset U \cup U'$  un poligono analitico tale che  $M \setminus \overline{\Omega}$  è connesso. Allora  $\Omega$  è standard.*

*Dimostrazione.* Si può supporre che  $\Omega$  sia connesso. Infatti se  $\Omega_i$  sono le componenti connesse di  $\Omega$ , poiché  $\Omega$  è la parte interna della sua chiusura  $\overline{\Omega_i} \cap \overline{\Omega_j}$  è discreto per  $i \neq j$ . Se  $M \setminus \overline{\Omega_i}$  fosse sconnesso mentre per ipotesi  $M \setminus \bigcup_j \overline{\Omega_j}$  è connesso,  $\bigcup_{j \neq i} \overline{\Omega_j}$  dovrebbe contenere una componente connessa di  $M \setminus \overline{\Omega_i}$ ; questo è assurdo perché ogni punto di  $\partial\Omega_i$  ha un intorno in cui  $\partial\Omega_i$  interseca  $\bigcup_j \partial\Omega_j$  in un numero finito di punti. Quindi se il lemma vale per  $\Omega$  connesso, nel caso generale si ha che ogni  $\Omega_i$  è standard e quindi  $\Omega$  è standard.

Sia dunque  $\Omega$  connesso; allora è semplice. Altrimenti, il suo bordo conterrebbe

una curva di Jordan chiusa  $\gamma$ , e  $M \setminus \gamma = (M \setminus (\Omega \cup \gamma)) \cup (\overline{\Omega} \setminus \gamma)$  sarebbe unione di due connessi non disgiunti; per la proposizione 4.23 si avrebbe un assurdo. Se una componente connessa di  $U$  o  $U'$  è biolomorfa a  $S^2$ , allora è aperta e chiusa in  $M$  e quindi coincide con  $M$ . Quindi  $\Omega$  è biolomorfo a un poligono analitico di  $S^2$ ; per il teorema dell'applicazione di Riemann è standard.

Si può quindi supporre che le componenti connesse  $\{U_i\}_{i \in I}$  di  $U$  e  $\{U'_j\}_{j \in J}$  di  $U'$  siano biolomorfe a  $D^2$ . Dal ricoprimento  $\{U_i, U'_j \mid i \in I, j \in J\}$  del compatto  $\overline{\Omega}$  si può estrarre un sottoricoprimento finito  $\{U_1, \dots, U_m, U'_1, \dots, U'_{m'}\}$ ; si può anche supporre che questo non ammetta sottoricoprimenti propri. Si possono poi scegliere dischi conformi  $K_i \subset U_i$  e  $K'_j \subset U'_j$  in modo che

$$\{K_i, K'_j \mid i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, m'\}$$

sia un ricoprimento di  $\overline{\Omega}$ , che nessun vertice di  $\Omega$  sia contenuto nel bordo di uno di questi dischi, e ognuno di essi abbia bordo trasversale a  $\partial\Omega$ . Siano  $\alpha_i$  le componenti connesse dei  $\partial K_i \cap \Omega$  al variare di  $i$ , e  $\alpha'_j$  le componenti connesse dei  $\partial K'_j \cap \Omega$  al variare di  $j$ . Gli  $\alpha_i$  e  $\alpha'_j$  sono in numero finito perché i punti di intersezione di  $\partial K_i$  e  $\partial\Omega$  formano un insieme compatto discreto. Per costruzione, se  $i \neq j$  allora  $\overline{\alpha_i}$  non interseca  $\overline{\alpha_j}$ , e lo stesso vale per gli  $\alpha'$ . Inoltre,  $\overline{\alpha_i}$  non interseca  $\overline{\alpha'_j}$  essendo  $\overline{\alpha_i} \cap \overline{\alpha'_j} \subset \partial K_h \cap \partial K'_{h'} \cap \overline{\Omega} = \emptyset$  perché ogni punto di  $\partial K_h \cap \overline{\Omega}$  deve essere contenuto in qualche  $K'_p$  e quindi non può essere in  $U_{h'}$  se non è in  $K'_{h'}$ . Per il lemma 4.24,  $\Omega$  è allora biolomorfo a  $D^2$ .  $\square$

**Proposizione 4.26.** *L'intersezione finita di poligoni analitici è un poligono analitico.*

*Dimostrazione.* Siano  $\Omega_1$  e  $\Omega_2$  poligoni analitici in  $M$ . Allora

$$\partial(\Omega_1 \cap \Omega_2) \subset \partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_2,$$

e ogni punto di  $\partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2$  è estremità di un numero pari di archi di  $\partial\Omega_1$  e  $\partial\Omega_2$ . Ora,  $\partial(\Omega_1 \cap \Omega_2)$  si ottiene da  $\partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_2$  togliendo un numero pari di archi; quindi ogni punto di  $\partial(\Omega_1 \cap \Omega_2)$  è estremità di un numero pari di archi di  $\partial(\Omega_1 \cap \Omega_2)$ . Inoltre,

$$\Omega_1 \cap \Omega_2 \subset \overline{\Omega_1 \cap \Omega_2} \subset \overbrace{\overline{\Omega_1 \cap \Omega_2}}^{\circ} = \overline{\Omega_1} \cap \overline{\Omega_2} = \Omega_1 \cap \Omega_2$$

e quindi  $\overline{\Omega_1 \cap \Omega_2} = \Omega_1 \cap \Omega_2$ .  $\square$

*Dimostrazione del teorema 3.1:* Siano  $\phi_i : D^2 \rightarrow K_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  dischi conformi che ricoprono  $M$ ; ogni  $\overline{K_i}$  è contenuto un disco conforme  $V_i$ . Poiché  $M$  è connessa si può supporre che ogni  $K_i$  intersechi qualche  $K_j$  con  $j < i$ . Sia

$$\Omega_p = \bigcap_{i=1}^p (M \setminus \overline{K_i}), \quad 1 \leq p \leq n,$$

e sia  $\Omega_0 = M$ . Per la proposizione 4.26  $\Omega_p$  è un poligono analitico; inoltre si ha  $\overline{\Omega_p} \subset \Omega_{p+1} \cup V_p$ . Per costruzione  $V_p$  è standard per ogni  $p = 1, \dots, n$ ; inoltre  $\Omega_n = \emptyset$  è standard e

$$M \setminus \overline{\Omega_p} = \bigcup_{i=1}^{\overset{\circ}{p}} \overline{K_i}$$

è connesso per ogni  $p$ . Applicando il teorema 4.25, si trova che  $\Omega_{n-1}, \dots, \Omega_0 = M$  sono standard. Poiché  $M$  è connesso e compatto, allora  $M$  è biolomorfo a  $S^2$ .  $\square$

# Indice

<b>Introduzione</b>	<b>1</b>
<b>1 Il teorema dell'applicazione di Riemann</b>	<b>4</b>
1.1 Preliminari . . . . .	4
1.2 Una dimostrazione . . . . .	7
1.3 Una dimostrazione alternativa . . . . .	11
1.3.1 Definizioni e preliminari . . . . .	12
1.3.2 Definizione della mappa approssimata . . . . .	14
1.3.3 Mappe quasiconformi . . . . .	16
1.3.4 Dimostrazione del teorema 1.37 . . . . .	18
1.4 Verso una versione costruttiva del teorema di Andreev . . . . .	23
<b>2 Una dimostrazione analitica</b>	<b>34</b>
2.1 Funzioni armoniche . . . . .	34
2.2 Funzioni subarmoniche . . . . .	38
2.3 Classificazione . . . . .	43
2.4 Il caso iperbolico . . . . .	43
2.5 Il caso non iperbolico . . . . .	49
2.6 Conseguenze . . . . .	55
<b>3 Una dimostrazione geometrica del teorema di uniformizzazione   assumendo il caso compatto</b>	<b>57</b>
<b>4 Altri modi di ottenere il caso compatto</b>	<b>65</b>
4.1 La dimostrazione attraverso il teorema di Riemann-Roch . . . . .	65
4.2 La dimostrazione di Demailly . . . . .	72

# Bibliografia

- [1] Manfredo P. Do Carmo. *Differential geometry of curves and surfaces*. Prentice Hall.
- [2] J.P. Demailly. Comment réduire le théorème d'uniformisation au cas compact. In *Conversation de comptoir, Gerland*, Autunno 1989.
- [3] Hershel M. Farkas; Irwin Kra. *Riemann surfaces*. Springer Verlag, 1980.
- [4] A. Marin. Le théorème d'uniformisation de Riemann d'après Demailly et Stallng. In *Seminario di geometria reale*, n. 560 in 1.41, pagg. 35–36. Università di Pisa, Dip. di Mat., Sez. di geom. e alg., 1990.
- [5] John W. Milnor. *Topology from the differentiable viewpoint*. The University Press, 1965.
- [6] Filippo Natoli. Teorema di uniformizzazione: riduzione al caso compatto secondo J.P. Demailly. 1998.
- [7] Riccardo Benedetti; Carlo Petronio. *Lectures on hyperbolic geometry*. Springer, 1992.
- [8] Burt Rodin; Dennis Sullivan. The convergence of circle packings to the Riemann mapping. *Differential Geometry*, 26:349–360, 1987.
- [9] William P. Thurston. The geometry and topology of 3-manifolds. *Princeton University Notes*, 1980.
- [10] James W. Vick. *Homology theory : an introduction to algebraic topology*. Academic Press, 1973.
- [11] Catherine Baily; Dorothea Vienne-Pollak. Uniformisation des surfaces de Riemann.
- [12] Olli Lehto; K. I. Virtanen. *Quasiconformal mappings in the plane*. Springer-Verlag, 1973.