Complessificazione

Forma normale di Jordan Reale

$\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$; $\mathbb{C} \sim \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $(x, y) = (x + iy) = z$,

$z + w = (x + iy) + (a + ib) := (x + a) + i(y + b)$,
$zw = (xa - yb) + i(ya + xb)$,

$i^2 = (0 + i1)^2 = -1 + i0 = -1$,

$\bar{z} = x + i(-y) = x - iy$, $\mathbb{R} = \{x + i0\} = \{z = \bar{z}\}$,

$\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$, $\overline{zw} = \bar{z}\bar{w}$

V $\mathbb{R}$-spazio vettoriale. La complessificazione di V è il $\mathbb{C}$-spazio vettoriale $(V_{\mathbb{C}}, +, \cdot)$ definito da:

- $V_{\mathbb{C}} \sim V \times V$, $Z = (X, Y) = (X + iY)$
- $Z + W := (X + A) + i(Y + B)$
- Per ogni $z = x + iy \in \mathbb{C}$, $zZ = (xX - yY) + i(yX + xY)$

$$Z = X + iY \to \bar{Z} := X + i(-Y) := X - iY$$

$$V \subset V_{\mathbb{C}},\ X = X + i0,\ V = \{Z \in V_{\mathbb{C}};\ \bar{Z} = Z\}$$

Se $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ è una base di V, allora $\mathcal{B}$ è una base (detta una **base reale**) di $V_\mathbb{C}$. Infatti, per ogni $Z = X + iY$,

$$Z = (\textstyle\sum_j a_j v_j) + i(\sum_j b_j v_j) = \sum_j (a_j + ib_j) v_j$$

quindi $\mathcal{B}$ genera $V_\mathbb{C}$. Se $Z = 0 = 0 + i0$, allora tutti gli a_j e i b_j sono nulli perché $\mathcal{B}$ è una base di V. Ne segue che $\dim_\mathbb{C} V_\mathbb{C} = \dim_\mathbb{R} V = n$.

Sia $f \in$ End(V). L'endomorfismo complessificato $f_{\mathbb{C}} \in \text{End}(V_{\mathbb{C}})$ è definito come segue:

$$f_{\mathbb{C}}(Z) = f_{\mathbb{C}}(X + iY) := f(X) + if(Y).$$

Se $\mathcal{B}$ è una base reale di $V_{\mathbb{C}}$, $M_{\mathcal{B}}(f) = M_{\mathcal{B}}(f_{\mathbb{C}})$. In particolare f e $f_{\mathbb{C}}$ hanno lo stesso polinomio caratteristico $p_f(t) = p_{f_{\mathbb{C}}}(t) \in \mathbb{R}[t]$.

Se $V = \mathbb{R}^n$, allora $V_{\mathbb{C}} = \mathbb{C}^n$ e l'inclusione $V \subset V_{\mathbb{C}}$ non è altro che l'inclusione standard $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{C}^n$ che, componente per componente, ripete l'inclusione basica $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. $A_{\mathbb{C}} = A \in M(n, \mathbb{R}) \subset M(n, \mathbb{C})$.

Fatti probabilmente già noti che seguono dalle proprietà del coniugio:

Se $p(t) \in \mathbb{R}[t] \subset \mathbb{C}[t]$, ed $\alpha \neq \bar{\alpha}$ è una radice complessa e non reale di $p(t)$, allora anche $\bar{\alpha}$ è radice di $p(t)$ ed inoltre α e $\bar{\alpha}$ hanno la stessa molteplicità m. Se $\alpha = a + ib$, allora

$(t-\alpha)(t-\bar{\alpha}) = (t^2 - 2at + a^2 + b^2) := q_\alpha(t)$ è un polinomio reale irriducibile su $\mathbb{R}$ di secondo grado.

Ne segue che ogni polinomio reale monico $p(t) \in \mathbb{R}[t]$ ha una decomposizione in fattori irriducibili reali $p(t) = (\prod_{j=1}^{s}(t-\lambda_j)^{n_j})(\prod_{l=1}^{r} q_{\alpha_l}(t)^{m_l})$

dove λ_j sono le eventuali radici reali di $p(t)$, mentre $q_{\alpha_l}(t)$ sono i fattori irriducibili di secondo grado corrispondenti alle coppie $\alpha_l, \bar{\alpha}_l$ di radici complesse non reali coniugate.

Sia $f \in \mathsf{End(V)}$, $f_{\mathbb{C}} \in \mathsf{End}(V_{\mathbb{C}})$ il complessificato, $p_f(t) = p_{f_{\mathbb{C}}}(t) \in \mathbb{R}[t]$ il polinomio caratteristico. Consideriamo le rispettive decomposizioni primarie:

$$V = (\bigoplus_{j=1}^{s} \ker(f - \lambda_j \mathrm{id}_V)^{n_j}) \oplus (\bigoplus_{l=1}^{r} \ker q_{\alpha_l}(f)^{m_l})$$

$$V_{\mathbb{C}} = (\bigoplus_{j=1}^{s} \ker(f_{\mathbb{C}} - \lambda_j \mathrm{id}_{V_{\mathbb{C}}})^{n_j}) \oplus$$

$$(\bigoplus_{l=1}^{r} [\ker(f_{\mathbb{C}} - \alpha_l \mathrm{id}_{V_{\mathbb{C}}})^{m_l} \oplus \ker(f_{\mathbb{C}} - \bar{\alpha}_l \mathrm{id}_{V_{\mathbb{C}}})^{m_l}])$$

Per ogni autovalore reale λ_j, $\ker(f_{\mathbb{C}} - \lambda_j \mathrm{id}_{V_{\mathbb{C}}})^{n_j}$ è il complessificato di $\ker(f - \lambda_j \mathrm{id}_V)^{n_j}$.

Ogni base di Jordan per la restrizione di f a $\ker(f - \lambda_j \mathrm{id}_V)^{n_j}$ è una base di Jordan reale per la restrizione di $f_{\mathbb{C}}$ a $\ker(f_{\mathbb{C}} - \lambda_j \mathrm{id}_{V_{\mathbb{C}}})^{n_j}$

Niente di nuovo rispetto alla forma normale di Jordan degli endomorfismi reali triangolabili!

Per ogni radice non reale α_l,

$\ker q_{\alpha_l}(f_{\mathbb{C}})^{m_l} =$

$\ker(f_{\mathbb{C}} - \alpha_l \mathrm{id}_{V_{\mathbb{C}}})^{m_l} \oplus \ker(f_{\mathbb{C}} - \bar{\alpha}_l \mathrm{id}_{V_{\mathbb{C}}})^{m_l}$

è il complessificato di $\ker q_{\alpha_l}(f)^{m_l}$, inoltre

$\ker(f_{\mathbb{C}} - \bar{\alpha}_l \mathrm{id}_{V_{\mathbb{C}}})^{m_l} = \overline{\ker(f_{\mathbb{C}} - \alpha_l \mathrm{id}_{V_{\mathbb{C}}})^{m_l}}$

Poniamo $\alpha = \alpha_l$, $m = m_l$. Se $\mathcal{B} = \{z_1, \dots z_m\}$ è una base di Jordan per la restrizione di $f_{\mathbb{C}}$ a $\ker(f_{\mathbb{C}} - \alpha \mathrm{id}_{V_{\mathbb{C}}})^m$ allora $\bar{\mathcal{B}} = \{\bar{z}_1, \dots \bar{z}_m\}$ è una base di Jordan per la restrizione di $f_{\mathbb{C}}$ a $\ker(f_{\mathbb{C}} - \bar{\alpha} \mathrm{id}_{V_{\mathbb{C}}})^m$ inoltre queste basi determinano la stessa matrice in forma normale di Jordan complessa, a condizione di sostituire α con $\bar{\alpha}$ in ogni blocco di Jordan.

Se $Z_j = X_j + Y_j \in \mathcal{B}$ come sopra, allora

$X_j = \frac{Z_j + \bar{Z}_j}{2} \in V$, $Y_j = \frac{Z_j - \bar{Z}_j}{2i} \in V$ è un cambiamento di base, dalla base $\{\mathcal{B}, \bar{\mathcal{B}}\}$ alla base **reale** $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} := \{X_1, Y_1, \ldots, X_m, Y_m\}$ di $\ker q_\alpha(f_{\mathbb{C}})^m$. Essa è detta una **base di Jordan reale** per la restrizione di f a $\ker q_\alpha(f)^m$, associata alla coppia di basi di Jordan complesse coniugate $(\mathcal{B}, \bar{\mathcal{B}})$.

Per descrivere la forma normale di Jordan reale associata ad una base di Jordan reale $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ basta analizzare il caso in cui la forma normale complessa portata da $(\mathcal{B}, \bar{\mathcal{B}})$ abbia due soli blocchi di Jordan di taglia $s \times s$ con autovalore α e $\bar{\alpha}$.

Allora la matrice portata da $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ ha un solo blocco di Jordan reale $2s \times 2s$; posto $\alpha = \rho e^{i\theta}$, lungo la diagonale esso presenta s copie del blocco 2×2

$$\rho \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Sulla sopra-diagonale (a blocchi) presenta $s-1$ blocchi uguali alla matrice identità 2×2.