Equivalenza "destra-sinistra"

$\dim V = n$, $\dim W = m$.

Definiamo la relazione su $\mathrm{Hom}(V, W)$:

$g \sim_{DS} f$ se esite $(h, k) \in GL(V) \times GL(W)$ tale che

$g = k \circ f \circ h$

Verifichiamo che è una relazione di equivalenza:

$f = \mathrm{Id}_W \circ f \circ \mathrm{id}_V$

$g = k \circ f \circ h$ allora $f = k^{-1} \circ g \circ h^{-1}$

$g = k \circ f \circ h$, $c = k' \circ g \circ h'$, allora

$c = (k' \circ k) \circ f \circ (h \circ h')$

In effetti, stiamo considerando $GL(V) \times GL(W)$ come un gruppo di trasformazioni di $\mathrm{Hom}(V, V)$, identificando (h, k) con la trasformazione

$$\tau_{h,k} : \mathrm{Hom}(V, W) \to \mathrm{Hom}(V, W), f \to k \circ f \circ h$$

e, quindi, la relazione di equivalenza associata.

Versione matriciale

$A, B \in M(m, n, \mathbf{K})$,

$B \sim_{DS} A$ se esiste $(P, Q) \in GL(n, \mathbf{K}) \times GL(m, \mathbf{K})$ tale che

$B = QAP$

Caratterizzazioni equivalenti della DS- equivalenza

$f, g \in \mathrm{Hom}(V, W)$. *I seguenti fatti sono tra loro equivalenti:*

(1) $g \sim_{DS} f$

(2) Per ogni coppia di basi B, D *di* V *e* W *rispettivamente,* $M_D^B(g) \sim_{DS} M_D^B(f)$.

(3) Esiste una coppia di basi B, D *di* V *e* W *rispettivamente,* $M_D^B(g) \sim_{DS} M_D^B(f)$.

(4) Esistono due coppie di basi B, D *e* B', D' *di* V *e* W *rispettivamente, tali che*

$M_D^B(g) = M_{D'}^{B'}(f)$.

(1) $\Rightarrow$ (2): $g = k \circ f \circ h$, allora

$$M^B_D(g) = M^D_D(k) M^B_D(f) M^B_B(h).$$

(2) $\Rightarrow$ (3): Ovvio.

(3) $\Rightarrow$ (1): $M^B_D(g) = Q M^B_D(f) P$;

allora esistono unici $h \in GL(V)$, $k \in GL(W)$ tali che $M^B_B(h) = P$, $M^D_D(k) = Q$. Ne segue che $g = k \circ f \circ h$.

(3) $\Rightarrow$ (4): $M^B_D(g) = Q M^B_D(f) P$;

esistono uniche basi B' di V e D' di W tali che $P = M^B_{B'}(\mathrm{Id}_V)$, $Q = M^{D'}_D(\mathrm{Id}_W)$. Quindi

$$M^B_D(g) = M^{B'}_{D'}(f).$$

(4) $\Rightarrow$ (3): $M^B_D(g) = M^{B'}_{D'}(f)$; allora

$$M^B_D(g) = M^D_{D'}(\mathrm{Id}_W) M^B_D(f) M^{B'}_B(\mathrm{Id}_V).$$

$\blacksquare$

Un invariante.

$\dim \mathrm{Im}(*)$ *è invariante per la DS-equivalenza, cioè se $g \sim_{DS} f$, allora* $\dim \mathrm{Im}(g) = \dim \mathrm{Im}(f)$*.*

Dim. $g = k \circ f \circ h$,

$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f \circ h)$ perché h è un isomorfismo.

$\mathrm{Im}(g) = k(\mathrm{Im}(f))$

$\dim \mathrm{Im}(f) = \dim k(\mathrm{Im}(f))$ perché k è un isomorfismo.

Nel caso matriciale, data $A \in M(m, n, \mathbf{K})$,

$X \to AX$,

la dimensione dell'immagine di A è chiamata il **rango** di A.

rank$A = \dim \operatorname{span}\{A^1, \ldots, A^n\}$

perché le colonne di A generano l'immagine di A.

Quindi se $B \sim_{DS} A$, allora rank$A$ = rank$B$.

$\dim \operatorname{Im}(*)$ *è un invariante* **completo** *per la DS-equivalenza. Cioè*

$g \sim_{DS} f$ *se e solo se* $\dim \operatorname{Im}(g) = \dim \operatorname{Im}(f)$

Equivalentemente e in termini matriciali:

data la funzione rango

$\operatorname{rank} : M(m, n, \mathbf{K}) \to \mathbb{N}$, allora

$B \sim_{DS} A$ se e solo se $B \sim_{\mathsf{rank}} A$.

Dim. Sia $r = \dim \mathrm{Im}(f) \leq m$. Ripercorriamo la dimostrazione della formula sulle dimensioni.

$B = \{v_1, \dots, v_r, z_1, \dots z_k\}$ base di V tale che gli z_j formano una base di ker(f).

$D = \{f(v_1), \dots f(v_r), w_1, \dots, w_t\}$ base di W, dove i primi r vettori sono una base di Im(f) poi completata ad una base di W. Allora la matrice

$$M_D^B(f) = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

è una matrice $m \times n$ a blocchi, la cui forma particolare dipende solo dalla dimensione r dell' immagine di f che determina la taglia $r \times r$ del blocco "matrice identità".

Se g ha la stessa dimensione dell'immagine, è rappresentata dalla stessa matrice in forma normale rispetto ad opportune basi B', D'. Applicando (1) $\iff$ (4) della proposizione sulle diverse caratterizzazioni della DS-equivalenza, si conclude che $g \sim_{DS} f$.

■

In termini di matrici,

se rank$A = r$, allora esiste

$(P, Q) \in GL(n, \mathbf{K}) \times GL(m, \mathbf{K})$ tale che

$$QAP = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Proposizione. *Per ogni matrice* $m \times n$ A,

rank$(A) = \text{rank}(A^t)$

Dim.

Proprietà della trasposta:

$(MN)^t = N^t M^t$;

se M quadrata è invertibile, allora anche M^t è invertibile e $(M^t)^{-1} = (M^{-1})^t$.

$$\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^t$$

è la matrice in "forma normale" $n \times m$ di rango r.

Sappiamo che

$$QAP = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(QAP)^t = P^t A^t Q^t = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^t$$

quindi $A^t \sim_{DS} \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^t$

$\mathrm{rank}(A^t) = r = \mathrm{rank}(A)$

per l'invarianza del rango.

$\blacksquare$