Prodotti scalare, 2

Sia (V, Φ) un K-spazio vettoriale, $\dim V = n$, munito di un prodotto scalare. Per ogni sottospazio $W \subset V$, la restrizione $\Phi|W$ è ovviamente un prodotto scalare. È interessante studiare cosa succede al variare di W.

Poniamo

$W^\perp = \{v \in V;\ \Phi(v, w) = 0,\ \forall w \in W\}$ il sottospazio di V **ortogonale** a W.

$\mathrm{Rad}(\Phi) := V^\perp$ è il **radicale** di Φ

Φ è **non degenere** se $\mathrm{Rad}(\Phi) = \{0\}$.

La dimensione del radicale è invariante per isometrie.

$V = K^n$, Φ_A è non degenere se e solo se A è invertibile perché

$$\mathrm{Rad}(\Phi_A) = \{X \in K^n;\ AX = 0\}.$$

Infatti X sta nel radicale se e solo se è ortogonale a tutti i vettori della base canonica;

$$e_j^t AX = R_j X = 0$$

dove R_j è la j-esima riga di A. Facendo variare j si ottiene appunto che $AX = 0$.

$$\dim \mathrm{Rad}(\Phi_A) = n - \mathrm{rango}(A).$$

Proposizione 1. *$V = W \oplus W^{\perp}$ se e solo se $\Phi|W$ è non degenere.*

Dim: $W \cap W^{\perp} = \mathrm{Rad}(\Phi|W)$. Quindi la somma è diretta se e solo se $\Phi|W$ è non degenere. Resta da dimostrare che in tal caso

$$\dim W^{\perp} = \dim V - \dim W.$$

Poniamo $\dim W = m$. Fissiamo una base $\mathcal{B}$ di V ottenuta estendendo una base di W. Passando in coordinate, consideriamo la matrice $m \times n$ A formata dalle prime m righe di $M_{\mathcal{B}}(\Phi)$. Allora $v \in W^{\perp}$ se e solo se $A[v]_{\mathcal{B}} = 0$. Se $\Phi|W$ è non degenere, allora A ha rango m perché la sottomatrice $m \times m$ di A formata dalle prime m colonne è invertibile. Ne segue $\dim W^{\perp} = n - m$ come voluto.

È sempre vero che $W \subset (W^\perp)^\perp$. In generale l'inclusione è stretta, anche se $\Phi|W$ è non degenere, perché $\Phi|W^\perp$ può essere degenere.

Supponendo che (V, Φ) sia *non degenere*, allora *per ogni* sottospazio W,

$\dim W^\perp = \dim V - \dim W$.

Infatti, prendendo come prima una base di V ottenuta estendendo una base di W, la matrice $M_{\mathcal{B}}(\Phi)$ ha rango n, quindi la sottomatrice A formata dalle prime m righe ha rango m e si conclude come nella dimostrazione precedente.

In tal caso $W \subset (W^\perp)^\perp$ ed hanno la stessa dimensione, quindi $W = (W^\perp)^\perp$. Si noti però che può essere $W \cap W^\perp \neq \{0\}$.

Proposizione 2. *In generale*

$\dim W^{\perp} = \dim V - \dim W + \dim(W \cap \mathrm{Rad}(\Phi))$

Si osserva che tale formula è compatibile con i due casi particolari già visti. $W \cap \mathrm{Rad}(\Phi)) \subset \mathrm{Rad}(\Phi|W)$, quindi è uguale a zero se $\Phi|W$ è non degenere. La stessa cosa è ovviamente vera se $\mathrm{Rad}(\Phi) = \{0\}$.

Per dimostrare la formula generale si adatta un po' la dimostrazione precedente. Si considera una decomposizione in somma diretta della forma

$V = W' \oplus (W \cap \mathrm{Rad}(\Phi)) \oplus Z \oplus T$

dove $W = W' \oplus (W \cap \mathrm{Rad}(\Phi))$

$\mathrm{Rad}(\Phi) = (W \cap \mathrm{Rad}(\Phi)) \oplus Z.$

Si considera una base $\mathcal{B}$ adattata a tale decomposizione e si può concludere come nei casi particolari già considerati.

Consideriamo lo spazio vettoriale quoziente

$V/\mathrm{Rad}(\Phi)$.

Il prodotto scalare passa al quoziente ponendo $\bar{\Phi}([v],[w]) := \Phi(v,w)$. Sia W uno spazio complementare di $\mathrm{Rad}(\Phi)$, cioè $V = W \oplus \mathrm{Rad}(\Phi)$.

Proposizione 3. $\Phi|W$ *è non degenere e la restrizione a* W *della proiezione sul quoziente* π, $\pi_W : (W, \Phi|W) \to (\mathrm{Rad}(\Phi), \bar{\Phi})$ *è una isometria.*

Dim: Se $w \in \text{Rad}(\Phi|W)$ allora appartiene a $\text{Rad}(\Phi)$, quindi $w = 0$ perché W è complementare al radicale. π_W è un isomorfismo lineare per fatti già visti sullo spazio quoziente. Per ogni $(w, w') \in W \times W$, $\Phi(w, w') = \bar{\Phi}([w], [w'])$.

Un corollario della proposizione precedente è che se W_1 e W_2 sono complementari di $\mathrm{Rad}(\Phi)$, muniti della restrizione di Φ sono **canonicamente isometrici** mediante $\pi_{W_2}^{-1} \circ \pi_{W_1}$.

$(V/\mathrm{Rad}(\Phi), \bar{\Phi})$ è lo spazio (con prodotto scalare) non degenere canonicamente associato a (V, Φ).

Dato (V, Φ),

$$q_\Phi : V \to K,\; q_\Phi(v) = \Phi(v, v)$$

è la **forma quadratica** associata a Φ. Sviluppando $q_\Phi(v+w)$ usando la bilinearità e la simmetria del prodotto scalare otteniamo la **formula di polarizzazione**:

$$2\Phi(v, w) = q_\Phi(v + w) - q_\Phi(v) - q_\Phi(w)$$

Diciamo che il campo K è di **caratteristica diversa da** 2, se $2 = 1 + 1 \neq 0$. In tal caso la formula di polarizzazione si può riscrivere: per ogni $(v, w) \in V \times V$,

$$\Phi(v, w) = 2^{-1}(q_\Phi(v + w) - q_\Phi(v) - q_\Phi(w))$$

Cioè la forma quadratica determina completamente il prodotto scalare. In particolare, $q_\phi = 0$ se e solo se $\Phi = 0$.

Da ora in poi, salvo avviso contrario, considereremo campi K di caratteristica diversa da 2.

Un vettore v di V si dice **isotropo** per il prodotto scalare Φ se

$$q_\Phi(v) = \Phi(v, v) = 0.$$

(V, Φ) è **anisotropo** se $v = 0$ è l'unico vettore isotropo. Se (V, Φ) è anisotropo allora è non degenere. Il viceversa non vale in generale. Per esempio su $\mathbb{R}^2$, si consideri il prodotto scalare $\Phi = \Phi_A$, dove A è diagonale e $a_{11} = 1$, $a_{22} = -1$. Allora, $q_\Phi(X) = x_1^2 - x_2^2$, $v = (1, 1)^t$ è isotropo non nullo.

Basi ortogonali. Una base $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ si dice **ortogonale** per Φ, se $\Phi(v_i, v_j) = 0$ per ogni $i \neq j$. In altre parole, $M_{\mathcal{B}}(\Phi)$ è una matrice **diagonale**.

Teorema 4. *Ogni* (V, Φ) *ammette basi ortogonali.*

Dim. Procediamo per induzione su $n = \dim V$. Se $n = 1$, tutte le basi sono ortogonali. Sia $\dim V = n$. Se la forma quadratica $q_\Phi = 0$, allora $\Phi = 0$, quindi tutte le basi sono ortogonali. Altrimenti esiste $v \in V$ non isotropo. Chiaramente $W = \text{Span}\{v\}$ ha dimensione 1 e $\Phi|W$ è non degenere. Allora $V = W \oplus W^\perp$. Poiché $\dim W^\perp = n - 1$, per ipotesi induttiva $\Phi|W^\perp$ ammette una base ortogonale $\mathcal{B}'$; allora $\mathcal{B} = \{v, \mathcal{B}'\}$ è una base ortogonale per Φ.

Per quanto detto prima, ogni $w \in V$ si scrive in modo unico nella forma

$w = \lambda v + z$, dove $z \in W^{\perp}$.

Possiamo esplicitare λ e quindi z. Imponiamo che

$z = w - \lambda v \in W^{\perp}$, cioè $\Phi(w - \lambda v, v) = 0$.

Svolgendo i conti otteniamo

$\lambda = \frac{\Phi(w,v)}{\Phi(v,v)}$

che ha senso perché v non è isotropo. Esso è detto il **coefficiente di Fourier** di w rispetto al vettore non isotropo v.

Il vettore $\frac{\Phi(w,v)}{\Phi(v,v)}v$ è la proiezione ortogonale di w sulla retta W generata da v, mentre

$z = w - \frac{\Phi(w,v)}{\Phi(v,v)}v$

è la proiezione ortogonale di w su $W^{\perp}$

Formulazione matriciale:

Se $V = K^n$ e $\Phi = \Phi_A$, allora esite $P \in GL(n, K)$ tale che $D = P^t AP$ è una matrice diagonale (a parole: ogni matrice simmetrica è congruente con una matrice diagonale).

Algoritmo di ortogonalizzaziomne.

Raffinando la dimostrazione del Teorema 4, vogliamo costruire un algoritmo che trasforma una arbitraria base $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots v_n\}$ di V in una base ortogonale $\mathcal{B}'$.

Se $\Phi = 0$, poniamo $\mathcal{B}' = \mathcal{B}$.

Altrimenti individuiamo concretamente un vettore v non isotropo. Ci sono due possibilità: (i) almeno uno dei vettori v_i è non isotropo e poniamo $v = v_i$; (ii) Tutti i v_i sono isotropi; in tal caso, siano v_i, v_j tali che $\Phi(v_i, v_j) \neq 0$. Allora $v = v_i + v_j$ non è isotropo.

In entrambi i casi, a meno di riordinare i vettori di $\mathcal{B}$ o di sostituire v_i con $v_i + v_j$, non è restrittivo assumere che v_1 è non isotropo. Poniamo $W = \text{Span}(v_1)$ e consideriamo $V = W \oplus W^{\perp}$.

Vogliamo determinare concretamente una base di $W^\perp$ per poi iterare la costruzione, ottenendo alla fine la base ortogonale $\mathcal{B}'$ cercata. Consideriamo allora le proiezioni ortogonali $w_2, \dots, w_n$ dei vettori $v_2, \dots, v_n$ su $W^\perp$ che conosciamo esplicitamente in funzione di $\{v_1, v_2, \dots, v_n$. Queste formule esplicite determinano un cambiamento di base dalla base iniziale $\mathcal{B}$ alla base $\tilde{\mathcal{B}} = \{v_1, w_2, \dots, w_n\}$. In particolare $\{w_2, \dots w_n\}$ sono indipendenti e formano una base di $W^\perp$ come volevamo.

L'algoritmo si semplifica se assumiamo che Φ sia anisotropo. In tal caso, ad ogni iterazione della costruzione, il primo vettore della base di partenza è automaticamente anisotropo; ci risparmiamo la fase iniziale di determinazione di un vettore non isotropo.

Inoltre vale la seguente proprietà interessante

Se Φ è anisotropo, $\mathcal{B}$ una base di V, $\mathcal{B}'$ la base ortogonale ottenuta implementando l'algoritmo a partire da $\mathcal{B}$, allora $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ determinano la stessa bandiera di sottospazi.

I prodotti anisotropi su $\mathbb{R}$.

Φ si dice **definito positivo** (risp, **negativo**) se per ogni $v \neq 0$, $\Phi(v, v) > 0$ (< 0).

Proposizione 5. *Φ è anisotropo se e solo se è definito.*

Dim: Una implicazione è ovvia. Supponiamo ora che non sia definito e mostriamo che non è anisotropo. Siano v, w tali che $\Phi(v, v) > 0$ e $\Phi(w, w) < 0$.

Per ogni $t \in \mathbb{R}$, $z = w + tv \neq 0$

perché $\Phi(-tv, -tv) = t^2\Phi(v, v) \geq 0$ mentre $\Phi(w, w) < 0$.

Mostriamo che esiste t tale che z è isotropo. Vogliamo cioè che

$$\Phi(z, z) = \Phi(w, w) + 2t\Phi(v, w) + t^2\Phi(v, v) = 0.$$

$\Delta = 4\Phi(v, w)^2 - 4\Phi(v, v)\Phi(w, w) > 0$. Quindi esistono sicuramente soluzioni reali dell'equazione.

I prodotti anisotropi su $\mathbb{C}$.

Affermiamo che sono tutti e soli quelli non degeneri su V, tale che $\dim V = 1$.

Altrimenti, siano v, w in V linearmente indipendenti. Per ogni $t \in \mathbb{C}$, $z = w + tv \neq 0$. Ragionando come prima, vogliamo trovare t tale che z sia isotropo, cioè una soluzione di una certa equazione di secondo grado, che esiste certamente in $\mathbb{C}$.

Basi ortogonali normalizzate.

Su $\mathbb{C}$. Sia $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base ortogonale di (V, Φ). A meno di riordinare, possiamo supporre che i primi m vettori siano non isotropi, mentre gli ultimi k siano una base di Rad(Φ). Quindi $\Phi(v_i, v_i) = c_i \neq 0$, $i = 1, \dots, m$.

Facciamo un cambiamento di base che modifica solo i primi m vettori nella forma

$v_i' = t_i v_i$, $t_i \neq 0$.

La nuova base è ancora ortogonale ed inoltre

$\Phi(v_i', v_i') = t_i^2 c_i$.

Esistono sicuramente t_i tali che $t_i^2 = 1/c_i$. Con questa scelta la base è *normalizzata* nel senso che

$\Phi(v_i, v_i) = 1$, $i = 1, \dots, m$.

Su $\mathbb{R}$. Ragionando come prima, consideriamo una base ortogonale tale che i primi p vettori v_i siano tali che $\Phi(v_i, v_i) > 0$, i successivi q tali che $\Phi(v_j, v_j) < 0$, i restanti isotropi a formare una base del radicale. Sui primi p vettori ragioniamo come nel caso complesso; per i successivi q, scegliamo t_i tale che $t_i^2 = -1/c_i$.

Otteniamo così una base normalizzata; la matrice rappresentativa diagonale corrispondente ha p entrate uguali a 1 seguite da q entrate uguali a -1 lungo la diagonale.

Classificazione dei proddotti scalare su uno spazio complesso

Sia V un $\mathbb{C}$-spazio vettoriale, $\dim V = n$. L'esistenza di basi ortogonali normalizzate per per i prodotti scalare su V permette di completare la loro classificazionbe a meno di Isometrie.

Teorema ($\mathbb{C}$) *La dimensione del radicale è un invariante completo. Se* $\dim \mathrm{Rad}(\Phi) = k$, *esiste una base ortogonale normalizzata* $\mathcal{B}$ *tale che la matrice rappresentativa* $M_{\mathcal{B}}(\Phi)$ *è diagonale con* $n-k$ *entrate uguali ad* 1 *seguite da* k *entrate nulle.*

Classificazione dei proddotti scalare su uno spazio reale

Per concludere la classificazione su $\mathbb{R}$, basta dimostrare che il numero p di entrate positive e il numero q di quelle negative in una matrice $M_{\mathcal{B}}(\Phi)$ dove $\mathcal{B}$ è ortogonale normalizzata, non dipendeno dalla scelta della base ma sono un carattere intrinseco del prodotto scalare (invariante per isometrie).

Poniamo

$$i_+(\Phi) = \max\{\dim W | W \subset V, \Phi|W \text{ definito} > 0\}$$

i_+ è detto l' *indice di positività* di Φ. In modo analogo si definisce l' indice di negatività $i_- = i_-(\Phi)$.

$$(i_+, i_-, \dim \mathrm{Rad}(\Phi))$$

è detta la *segnatura* di Φ.

Teorema ($\mathbb{C}$) (Sylvester) *La segnatura è un invariante completo. Per ogni base ortogonale normalizzata $\mathcal{B}$, $p = i_+$, $q = i_-$,* $\dim \mathrm{Rad}(\Phi) = n - (i_+ + i_-)$.

Dim. Sia $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_p, w_1, \ldots w_q, z_1, \ldots, z_k\}$ una base ortogonale normalizzata con $M_{\mathcal{B}}(\Phi)$ del tipo detto. $k = \dim \mathrm{Rad}(\Phi)$ e gli z_j sono una base del radicale. Dimostriamo, per esempio, che $i_+ = p$. Se $W = \mathrm{Span}(v_1, \ldots, v_p)$, $\Phi|W$ è definito > 0. Quindi $i_+ \geq p$. Mostriamo che non può essere $i_+ > p$. Sia $Z = \mathrm{Span}(w_1, \ldots, w_q, z_1, \ldots, z_k)$. $\Phi|Z$ è semidefinito ≤ 0. Sia ora W, $\dim W = i_+$, $\Phi|W > 0$. Se fosse $i_+ > p$, allora per la formula di Grassmann, $Z \cap W \neq \{0\}$. Sia w non nullo in tale intersezione. Allora $\Phi(w, w) > 0$ e $\Phi(w, w) \leq 0$. Quindi $\Phi(w, w) = 0$. Ma siccome $w \in W$ e $\Phi|W > 0$, necessariamente $w = 0$, contro il fatto che per ipotesi $w \neq 0$.