Quadriche: equazioni e luogo di zeri

$K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$. $A = K^n$ spazio affine standard su $V = K^n$.

Data una funzione polinomiale di grado $d = 2$

$p(X) = p(X_1, \ldots, X_n) \in K[X_1, \ldots, X_n]$

il suo *luogo di zeri*

$Z = Z(p) = \{x \in K^n; p(x) = 0\}$

è detto una **quadrica**, $p(x) = 0$ è una **equazione** della quadrica. Se $n = 2$, le quadriche sono anche dette **coniche**.

Indichiamo con $E(K)$ l'insieme delle equazioni polinomiali di grado $d = 2$. Con $Q(K)$ l'insieme dei loro luoghi di zero cioè delle quadriche di K^n. Allora esiste una ovvia applicazione surgettiva

$\pi : E(K) \to Q(K)$, $p \to Z(p)$

Domanda. *Quando $Z(p_1) = Z(p_2)$?*

Condizione **sufficiente**:

Esiste $\lambda \in K \setminus \{0\}$ tale che $p_2 = \lambda p_1$.

Questo definisce una relazione di equivalenza $\sim$ su $E(K)$ e (mantenendo la stessa notazione) abbiamo una applicazione surgettiva

$$\pi : E(K)/\sim \ \to Q(K), \ [p] \to Z(p)$$

Domanda. *È questa applicazione π bigettiva?*

Consideriamo il caso $n = 1$. Allora

$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$, $a_2 \neq 0$

Consideriamo $K = \mathbb{C}$, allora

$p(x) = a_2(x - \lambda)(x - \mu)$, $\mu \neq \lambda$

oppure

$p(x) = a_2(x - \lambda)^2$

$Z(p) = \{\lambda, \mu\}$ oppure $Z(p) = \{\lambda\}$.

Da cui segue che se $K = \mathbb{C}$, π è bigettiva.

Se $K = \mathbb{R}$, le stesse considerazioni valgono per i polinomi reali che hanno solo radici reali. In generale π non è iniettiva a causa dell'esistenza di polinomi senza radici reali. Per esempio:

$$Z(x^2 + 1) = Z(x^2 + 2) = \emptyset$$

benché i due polinomi non siano uno un multiplo dell'altro.

Consideriamo le coniche, cioè il caso $n = 2$. Si può estendere la discussione precedente:

Su $\mathbb{C}$, π è bigettiva.

Su $\mathbb{R}$ non è bigettiva; le coniche che ammettono equazioni che non sono l'una un multiplo dell'altra sono quelli che non sono "*curve*". Ad esempio

$Z = \emptyset$ $(Z(x_1^2 + x_2^2 + 1) = Z(2x_1^2 + x_2^2 + 1))$

$Z = \{pt\}$ $(Z(x_1^2 + x_2^2) = Z(2x_1^2 + x_2^2))$

Quanto detto vale per n arbitrario, con una maggiore complicazione nella descrizione dei casi reali "degeneri" (le quadriche reali che **non sono ipersuperficie**).

Quadriche a meno di equivalenza affine. Sia $Z = Z(p)$ una quadrica in K^n.

Ogni polinomio di grado 2 (in n variabili) può essere scritto in modo compatto nella forma:

$X = (x_1, \ldots, x_n)^t$, $p(X) = X^t A X + 2B^t X + c$

$A \in M(n, K)$, $A \neq 0$, $A = A^t$, $B \in K^n$, $c \in K$

Esempio: $n = 2$,

$a_{1,1}x_1^2 + 2a_{1,2}x_1x_2 + a_{2,2}x_2^2 + 2b_1x_1 + 2b_2x_2 + c$

$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{1,2} & a_{2,2} \end{pmatrix}$, $2B^t = 2(b_1, b_2)$

Sia $f \in \mathsf{Aff}(K^n)$,

$f(X) = QX + T$, $Q \in GL(n, K)$, $T \in K^n$

$f^{-1}(X) = PX + D$, $P = Q^{-1}$, $D = -P^{-1}(T)$

Se $Z = Z(p)$ è una quadrica, allora anche $f(Z)$ è una quadrica.

$f(Z) = \{X \in K^n; p(f^{-1}(X)) = p \circ f^{-1}(X) = 0\}$

Cioè

$(PX + D)^t A(PX + D) + 2B^t(PX + D) + c =$

$X^t(P^tAP)X + 2(T^tAQ + B^tP)X+$

$(T^tAT + 2B^tD + c) = 0$

Abbiamo verificato che $p \circ f^{-1}$ è una equazione della quadrica $f(Z(p)) = Z(p \circ f^{-1})$

Mettiamo su l'insieme $Q(K)$ delle quadriche di K^n la relazione di **equivalenza affine**

$Z_2 \sim_a Z_1$ se e solo se esite $f \in \mathsf{Aff}(K^n)$ tale che $Z_2 = f(Z_1)$.

Possiamo "sollevare" questa relazione sull'insieme $E(K)$ delle equazioni delle quadriche:

$p_2 \sim_a p_1$

se e solo se esistono $\lambda \in K \setminus \{0\}$, $f \in \mathsf{Aff}(K^n)$ tali che

$p_2 = \lambda p_1 \circ f^{-1}$.

Segue dalla discussione precedente che

$$\pi : E(K)/_{\sim_a} \to Q(K)/_{\sim_a}$$

è bigettiva se $K = \mathbb{C}$, mentre su $\mathbb{R}$ è vero a condizione di non considerare i casi di quadriche "degeneri" (che non sono ipersuperficie) descritte prima.

Ci concentreremo in entrambi i casi a studiare $E(K)/_{\sim_a}$ le equazioni delle quadriche a meno di equivalenza affine.

Riformuliamo il problema utilizzando l'inclusione

$K^n \subset K^{n+1}, \ X^t \to (X^t, 1)^t,$

$K^n = \mathcal{P} := \{Y \in K^{n+1}; y_{n+1} = 1\}$

che ci ha permesso di identificare Aff(K^n) con

$$G_{\mathcal{P}} = \{\begin{pmatrix} P & D \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; P \in GL(n, K), \ D \in K^n\}$$

Consideriamo un polinomio di secondo grado (in n variabili) scritto nel modo compatto visto sopra

$p(X) = X^tAX + 2B^tX + c$, $A = A^t \neq 0$, $B \in K^n$, $c \in K$

Poniamo,

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ B^t & c \end{pmatrix}$$

Allora $M = M^t \in M(n+1, K)$ e $p(X)$ si può riscrivere nella forma

$$Y^tMY = 0, \ \ y_{n+1} = 1$$

equivalentemente

$$p(X) = (X^t, 1)M(X^t, 1)^t$$

Da ora in poi esprimiamo le equazioni delle quadriche mediante tali matrici

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ B^t & c \end{pmatrix}, \; M = M^t \in M(n+1, K), \; A \neq 0$$

Riformuliamo in questi termini anche l'equivalenza affine.

$$M' \sim_a M$$

se e solo se esistono

$$\lambda \in K \setminus \{0\}$$

$$Q = \begin{pmatrix} P & D \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G_{\mathcal{P}}$$

tali che

$$M' = \lambda Q^t M Q$$

Esplicitando: data

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ B^t & c \end{pmatrix}, \ M = M^t \in M(n+1, K), \ A \neq 0$$

$M' \sim_a M$ se è della forma

$$M' = \lambda \begin{pmatrix} P^t A P & P^t A D + P^t B \\ D^t A P + B^t P & D^t A D + 2 D^t B + c \end{pmatrix},$$

$\lambda \neq 0, \ P \in GL(n, K), \ D \in K^n.$

Il problema è quindi quello di studiare il quoziente

$$\{M\}/_{\sim_a}$$

Il caso delle coniche ($n = 2$)

Individueremo degli invarianti specializzando progressivamente la forma dell'equazione, fino a individuare le *forme normali* che codificano le classi di equivalenza.

Cominciamo con il caso complesso $K = \mathbb{C}$.

Un primo invariante evidente è la coppia di ranghi

$(\text{rank}A, \text{rank}M)$

Consideriamo ora la seguente proprietà

Esiste una traslazione $Q = \begin{pmatrix} I & D \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G_{\mathcal{P}}$

tale che $M' = Q^t M Q = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & c' \end{pmatrix}$

Equivalentemente, il sistema lineare non omogeneo

$AD = -B$

ammette una soluzione D.

Questo significa che nel nuovo polinomio non ci sono monomi di primo grado. Geometricamente significa che $Z(M')$ è invariante per la simmetria centrale di centro 0, $X \to -X$. $Z(M)$ è simmetrico rispetto alla simmetria centrale di centro D, $X \to X'$ tale che D è il punto medio dei punti X, X'.

Questa è una proprietà invariante per la relazione $\sim_a$.

Quindi le equazioni delle coniche complesse si distribuiscono in due classi quelle che hanno un centro di simmetria e quelle che non lo hanno.

Concentriamoci sul caso **con centro**.

A meno di una traslazione possiamo supporre che

$$M = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}$$

Studiamo i valori possibili della coppia

$$(\text{rank}A, \text{rank}M)$$

e per ciascun caso possibile determiniamo la corrispondente forma normale dell'equazione. Siccome $A \neq 0$,

$$1 \leq \text{rank}A \leq \text{rank}M$$

$(2,3)$, $c \neq 0$, moltiplicando per $1/c$, possiamo supporre che l'equazione sia della forma

$$M = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Esiste $P \in GL(2, \mathbb{C})$ tale che $P^t A P = I$, per cui posto

$$Q = \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M' = Q^t M Q = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e questa è la forma normale cercata; tornando alla forma polinomiale

$$x_1^2 + x_2^2 + 1 = 0$$

Questo individua la classe delle *ellissi complesse*.

$(2,2)$, $c = 0$, ...

la forma normale è

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + ix_2)(x_1 - ix_2) = 0$$

Due rette affini complesse incidenti.

$(1, 2)$ ...

$x_1^2 + 1 = (x_1 + i)(x_1 - i) = 0$

Due rette affini complesse parallele.

$(1, 1)$, $x_1^2 = 0$

Una retta complessa "doppia".

Abbiamo considerato tutte le coppie di ranghi possibili nel caso con centro e per ciascuna abbiamo determinato una forma normale dell' equazione. Come conseguenza della discussione appena fatta abbiamo

La coppia di ranghi $(\text{rank}A, \text{rank}M)$ **è un invariante completo per le coniche affini complesse con centro**.

Resta da considerare il caso **senza centro**. Necessariamente rank$A = 1$. Esiste $P \in GL(2, \mathbb{C})$ tale che

$$P^t AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

quindi possiamo assumere l'equazione della forma

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & b_1 \\ 0 & 0 & b_2 \\ b_1 & b_2 & c \end{pmatrix}$$

e $b_2 \neq 0$, altrimenti sarebbe con centro.

$\det M = -b_2^2 \neq 0$. Quindi rank$M = 3$, cioè abbiamo la coppia di ranghi $(1, 3)$ che non compariva nel caso con centro. Determiniamo anche in questo ultimo caso una forma normale.

Mediante la traslazione

$$X \to X + (-b_1, \frac{b_1^2 - c}{2b_2})^t$$

otteniamo un'equazione della forma

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b \\ 0 & b & 0 \end{pmatrix},\ b \neq 0$$

Infine, ponendo $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & b^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$Q^t M Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$x_1^2 + 2x_2 = 0$$

è la forma normale normale cercata che codifica la classe delle *parabole affini complesse*.

Riassumendo

La coppia di ranghi $(\mathrm{rank}A, \mathrm{rank}M)$ *è un invariante completo per le coniche complesse a meno di equivalenza affine. Per ogni valore ammissibile della coppia, abbiamo esibito una equazione in forma normale.*

Quando $\mathrm{rank}M = 3$, *le coniche complesse sono dette* **non degeneri***; queste si distribuiscono nella sotto-classe delle* **ellissi** *che sono con centro e quella delle* **parabole** *che non hanno centro.*

Le coniche complesse degeneri hanno tutte centro e si distribuiscono nelle sotto-classi **due rette incidenti**, **due rette parallele**, **una retta doppia***.* Sono tutte *riducibili*: l'equazione si fattorizza nel prodotto di due polinomi di primo grado, il luogo di zeri è unione di due rette.

Coniche reali

Poniamo ora $K = \mathbb{R}$ e ripercorriamo la classificazione fatta nel caso complesso.

La coppia di ranghi $(\text{rank}A, \text{rank}M)$ *e la proprietà di avere o non avere centro sono ugualmente invarianti.*

Un ingrediente importante nel caso complesso è stata la classificazione delle matrici simmetriche a meno di congruenza per cui il rango è un invariante completo. Nel caso reale un invariante completo è la *segnatura* che però non è invariante per la moltiplicazione con uno scalare negativo. D'altra parte, l' *indice di Witt* di una matrice reale simmetrica ha questa proprietà.

Allora la quaterna

(rank$A, w(A)$), (rank$M, w(M)$)

dove $w(*)$ è l'indice di Witt della parte non degenere del prodotto scalare portato dalla matrice, è invariante per l'equivalenza affine sulle equazioni delle coniche reali.

Vogliamo dimostrare che è un invariante completo.

Il caso **senza centro** si tratta sostanzialmente nello stesso modo. La sola differenza per ottenere la specializzazione iniziale

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & b_1 \\ 0 & 0 & b_2 \\ b_1 & b_2 & c \end{pmatrix}$$

è che, se necessario, moltiplichiamo per lo scalare -1. Il resto della discussione è identico. Questo caso è caratterizzato dai valori della quaterna $(1,0),(3,1)$ che in effetti è completamente determinata dalla coppia di ranghi $(1,3)$. Individua la classe delle *parabole reali*.

Nel caso **a centro** ci limitiamo a indicare i valori possibili della quaterna e le rispettive forme normali.

$(2,0)(3,1)$, $x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0$ (*Ellissi reali*)

$(2,1)(3,1)$, $x_1^2 - x_2^2 + 1 = 0$ (*Iperboli reali*)

$(2,0)(3,0)$, $x_1^2 + x_2^2 + 1 = 0$ (*conica vuota*)

$(2,1)(2,1)$, $x_1^2 - x_2^2 = (x_1 + x_2)(x_1 - x_2) = 0$ (*due rette incidenti*)

$(2,0)(2,0)$, $x_1^2 + x_2^2 = 0$ (*un punto*)

$(1,0)(2,1)$, $x_1^2 - 1 = 0$ (*due rette parallele*)

$(1,0)(1,0)$, $x_1^2 = 0$ (*retta doppia*)

$(1,0)(2,0)$, $x_1^2 + 1 = 0$ (*conica vuota*)

Se chiamiamo non degenere un'equazione per cui rank$M = 3$ ed *escludiamo quelle il cui luogo di zeri non è una curva*, allora le coniche non degeneri reali si distribuiscono nelle sottoclassi **ellissi** e **iperboli** (con centro), **parabole** (senza centro). Quelle degeneri nelle sottoclassi **due rette incidenti, due rette parallele e una retta doppia.**

Osservazione I vari tipi affini di coniche reali sono distinti anche da proprietà *topologiche*.

Le ellissi sono *connesse* e *compatte*, le iperboli non sono connesse e non sono compatte, le parabole sono connesse e non compatte.

Un altro modo di pensare le quadrice reali

$\mathbb{R}^n \subset \mathbb{C}^n$, e coincide con il luogo dei punti fissi del coniugio

$\sigma : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$, $Z \to \bar{Z}$ $(z_j \to \bar{z}_j$ per $j = 1, \ldots, n)$.

Se $p(X) \in \mathbb{R}[X]$,

$Z_{\mathbb{C}}(p) = \{z \in \mathbb{C}^n; p(z) = 0\}$

è una quadrica complessa *definita su* $\mathbb{R}$; è invariante per σ:

$\sigma(Z_{\mathbb{C}}(p)) = Z_{\mathbb{C}}(p)$

La corrispondente quadrica reale $Z(p)$ è la parte reale di $Z_{\mathbb{C}}(p)$ cioè il luogo dei punti fissi per $\sigma_{|Z_{\mathbb{C}}(p)}$.

Allora possiamo considerare l' azione di

$\mathsf{Aff}(\mathbb{R}^n) \subset \mathsf{Aff}(\mathbb{C}^n)$

sull' insieme di queste *quadriche complesse definite su* $\mathbb{R}$ munite dell' involuzione data dalla restrizione di σ. La classe di equivalenza affine della parte reale di $Z_{\mathbb{C}}$ è ora **un** invariante ma non il solo.

Se riguardiamo, per esempio, la classificazione delle coniche reali in questa nuova prospettiva, i casi con equazioni non affinemente equivalenti ma con lo stesso luogo di zeri vuoto diventano perfettamente distinguibili in termini di $(Z_{\mathbb{C}}, \sigma)$. Dimenticando l'involuzione il caso in cui la parte reale è un punto rientrerebbe nella classe delle coppie di rette complesse incidenti; tenendo conto dell'involuzione e quindi della diversa parte reale questo caso appartiene ad una classe distinta.

Perché "coniche"?

Lavoriamo su $\mathbb{C}$ o su $\mathbb{R}$ (eventualmente pensando in termini di quadriche complesse definite su $\mathbb{R}$)

Riconsideriamo il modo

$Y^t M Y = 0$, $y_{n+1} = 1$

di esprimere una quadrica Z in $K^n \subset K^{n+1}$.

$C_M = \{Y \in K^{n+1}; Y^t M Y = 0\}$

è il luogo di zeri di un polinomio *omogeneo* di grado 2 nelle $n+1$ variabili $(y_1, \dots, y_n, y_{n+1})$; quindi è un *cono di centro* 0: Per ogni $y_0 \in C_M$, $y_0 \neq 0$, per ogni $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $\lambda y_0 \in C_M$.

Quindi C_M è unione di rette passanti per l'origine. Tutte le rette passanti per 0 che non sono parallele all' iperpiano $y_{n+1} = 1$ intersecano questo iperpiano affine; C_M è dato dall' unione del cono di centro 0 e base la quadrica Z unito alle rette che formano $C_M \cap \{y_{n+1} = 0\}$.

Z è l' intersezione del cono C_M con un iperpiano affine. Tenendo fisso C_M, facendo variare l' iperpiano affine troviamo altre coniche.

Esempio.

In $\mathbb{R}^3$ consideriamo il cono C di equazione

$$y_1^2 + y_2^2 - y_3^2 = 0.$$

È il cono di centro 0 e base la circonferenza unitaria $x_1^2 + x_2^2 = 1$ in $\mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^3$.

Notiamo che è il cono dei vettori isotropi di $\mathbb{R}^3$ munito del prodotto scalare non degene standard di segnatura $(2, 1)$ cioè associato alla matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Facendo variare il piano affine P, discutiamo il tipo della conica $Z = P \cap C$.

Cominciamo con gli iperpiani che passano per l'origine (cioè quelli che sono sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^3$)

Si hanno tre possibilità

(1) $P \cap C = \{0\}$ (P è un piano di tipo "spazio").

(2) P è tangente a C (P è generato da un vettore di tipo spazio ed uno di tipo "luce"). Allora $P \cap C$ è una retta doppia (generata dal vettore di tipo luce).

(3) P è "trasverso" a C, (P è un piano iperbolico). Allora $P \cap C$ è una coppia di rette incidenti generate da due vettori di tipo luce indipendenti.

Traslando P mediante vettori non contenuti in P, $Q = P + v$, otteniamo piani affini che hanno P come giacitura e che intersecano "trasversalmente" il cono lontano dall'origine.

Rispettivamente

(1) $Q \cap C$ è una ellisse.

(2) $Q \cap C$ è una parabola.

(3) $Q \cap C$ è una iperbole.

Coniche reali a meno di isometrie

Specializziamo la classificazione delle coniche reali sostituendo il gruppo delle trasformazioni affini con il gruppo delle isometrie metriche Isom$(\mathbb{R}^2, d)$, cioè l' *estensione affine di* $O(2,\mathbb{R})$. Usando la rappresentazione di Aff$(\mathbb{R}^2)$ mediante $G_{\mathcal{P}}$, Isom$(\mathbb{R}^2, d)$ corrisponde al sottogruppo

$$OG_{\mathcal{P}} = \{ \begin{pmatrix} P & D \\ 0 & 1 \end{pmatrix} ; P \in O(2,\mathbb{R}), D \in \mathbb{R}^2 \}$$

Chiaramente il **tipo affine** della equazione è un invariante. Vogliamo trovare altri invarianti specifici.

Osserviamo che adesso $P^t = P^{-1}$, quindi

$\det A$, traccia$A$

sono invarianti per l'azione di Isom$(\mathbb{R}^2, d)$.

Poiché per ogni $Q \in 0G_{\mathcal{P}}$,

$\det Q = \det P = \pm 1$ e $\det Q^t = \det Q$,

anche $\det M$ è invariante per l'azione di $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2, d)$.

D'altra parte **non** sono invarianti per equivalenza affine perché

$\det(\lambda A) = \lambda^2 \det(A)$,

$\det(\lambda M) = \lambda^3 \det(M)$

$\mathrm{traccia}(\lambda A) = \lambda \mathrm{traccia}(A)$.

Possiamo però costruire invarianti per equivalenza affine-isometrica, considerando opportuni quozienti **omogenei** di queste quantità, assumendo che i denominatori siano non nulli.

Ad esempio consideriamo

$$\frac{\det(A)}{\mathrm{traccia}(A)^2}, \ \frac{\det(A)\mathrm{traccia}(A)}{\det(M)}, \ \frac{\det(A)^3}{\det(M)^2}, \ \ldots$$

Esempio: supponiamo che M sia l'equazione di una ellisse (questo è il tipo affine che si determina mediante la solita quaterna di invarianti calcolata su M). Ripercorrendo e specializzando il procedimento che ha portato alla forma normale affine, è facile vedere che la forma normale dell' equazione, a meno di isometrie, è del tipo

$$\lambda x_1^2 + \mu x_2^2 - 1 = 0,\ \lambda \geq \mu > 0.$$

Questo ci dice che le ellissi reali considerate a meno di isometrie sono un insieme infinito e

$$\mathcal{E} := \{(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2; \lambda \geq \mu > 0\}$$

ne è uno *spazio di parametri*.

Problema: *Data l'equazione M di un ellisse, determinare i parametri della sua classe di isometria senza applicare tutto il procedimento, usando solo gli invarianti omogenei di M.*

$$\lambda + \mu = -\frac{\text{traccia}(A)\det(A)}{\det M} := p$$

$$\lambda\mu = \frac{\det(A)^3}{\det(M)^2} := q$$

come si verifica calcolando questi invarianti omogenei sulla matrice in forma normale

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Abbiamo espresso $\lambda + \mu$ e $\lambda\mu$ per mezzo di due invarianti omogenei di M.

Quindi λ, μ sono le radici del polinomio di secondo grado

$$X^2 - pX + q$$

i cui coefficienti sono esplicitamente espressi in funzione delle entrate della matrice data M. Applicando la formula di soluzione delle equazioni di secondo grado, infine esplicitiamo λ e μ.

Il trattamento degli altri tipi di conica a meno di isometria è analogo.

La forma normale delle iperboli a meno di equivalenza affine/isometrica è

$$\lambda x_1^2 + \mu x_2^2 - 1 = 0,\ \lambda > 0,\ \mu < 0$$

e si determinano i parametri (λ, μ) a partire da M in modo formalmente uguale al caso delle ellissi.

La forma normale delle parabole è

$$a x_1^2 + 2x_2 = 0,\ a > 0$$

corrispondente alla matrice

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$a^2 = -\frac{\text{traccia}(A)^3}{\det M}.$$

Coniche proiettive: cenni

Molto di quanto è detto qui sotto vale in generale per le quadriche. Per semplicità ci restringiamo a considerare le coniche.

A suo tempo abbiamo studiato l'insieme $G_{3,1}(K)$ dei sottospazi 1-dimensionali di K^3. I discorsi fatti a suo tempo possono essere riformulati come segue.

Consideriamo su $K^3 \setminus \{0\}$ la relazione di *equivalenza proiettiva*:

$v \sim_p w$ se e solo $v = \lambda w$, $\lambda \neq 0$.

$\pi : K^3 \setminus \{0\} \to \mathbf{P}^2(K)$

è la proiezione sul quoziente che viene detto il K-*piano proiettivo*.

È immediato che la classe di equivalenza $[v]$ di v, come sottoinsieme di $K^3 \setminus \{0\}$, consiste in $\text{Span}(v) \setminus \{0\}$. Quindi cè una bigezione canonica

$$\mathbf{P}^2(K) \cong G_{3,1}$$

Avevamo visto che $G_{3,1}(K)$ poteva essere ricoperto da 3 "celle" di dimensione 2. Ridescriviamo questa costruzione in termini di $\mathbf{P}^2(K)$.

Siano (y_1, y_2, y_3) le coordinate canoniche su K^3. Per ogni j, si consideri l'iperpiano affine

$P_j := \{y_j = 1\}$.

$\pi_{|}P_j$ è iniettiva e per ogni $v = (v_1, v_2, v_3) \neq 0$, esiste almeno un j tale che $P_j \cap [v] \neq \emptyset$. Quindi le tre "celle" $C_j = \pi(P_j)$ sono ciascuna in bigezione con K^2 e ricoprono $\mathbf{P}^2(K)$.

Un polinomio di secondo grado *omogeneo* in tre variabili si può scrivere nella forma

$p(Y) = Y^t N Y$, $N = N^t \neq 0$.

$Z(p)$ è un cono in K^3 di centro l'origine:

se $v \neq 0$, $v \in Z(p)$, allora $[v] \subset Z(p)$.

Quindi $\pi(Z(p))$ è un ben definito sottoinsieme di $\mathbf{P}^2(K)$ che per definizione è una **conica proiettiva**.

Se $p(Y)$ è omogeneo di *primo grado*, allora $\pi(Z_p)$ è una *retta proiettiva*.

Sappiamo che ogni conica affine in $K^2 \subset K^3$ è della forma

$Y^t M Y = 0$, $y_3 = 1$

tramite la proiezione π possiamo considerala come l'intersezione della conica proiettiva definita da M con la cella C_3.

Ripetendo lo stesso discorso per le altre due celle, abbiamo che la conica proiettiva e l'unione di tre coniche affini.

Consideriamo una conica Z in $K^2 \subset K^3$ che possiamo identificare con la sua immagine in $C_3 \subset \mathbf{P}^2(K)$.

Sia $\hat{Z} \subset \mathbf{P}^2(K)$ la conica proiettiva associata.

Allora $\widehat{Z} \setminus Z$ è l'intersezione di $\widehat{Z}$ con la retta proiettiva $\pi(\{y_3 = 0\})$.

Essa è detta la *retta all'infinito della cella* C_3.

Esempio: Su $\mathbb{C}$ consideriamo l' ellisse affine in forma normale

$$y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = 0,\ y_3 = 1$$

La sua intersezione con la retta all'infinito si ottiene considerando

$$\pi(\{y_1^2 + y_2^2 = 0, y_3 = 0\})$$

che è l'immagine di due rette incidenti, quindi consiste di due punti. L'ellisse proiettiva interseca la retta all' infinito trasversalmente in quei due punti.

Per la parabola complessa

$\pi(\{y_1^2 = 0, y^3 = 0\})$ è l'immagime di una retta doppia, quindi è un punto; la conica proiettiva è tangente alla retta all'infinito in quel punto.

Su $\mathbb{R}$, per l' ellisse reale in forma normale

$\{y_1^2 + y_2^2 = 0, y_3 = 0\}$ consite del solo punto 0 e quindi l'intersezione con la retta all'infinito è vuota.

Per l' iperbole reale in forma normale

$\pi(\{y_1^2 - y_2^2 = 0, y_3 = 0\})$ è l'immagine di due rette incidenti quindi è formata da due punti. Qualitativamente si è come nel caso delle ellissi complesse. In effetti, data questa analogia sarebbe forse meglio chiamare quest'ultime *iperboli complesse*.

Si noti che $\{y_1^2 - y_2^2 = 0, y_3 = 1\}$ sono gli asintoti dell' iperbole.

Per la parabola reale si ha lo stesso comportamento qualitativo che per la parabola complessa.

$GL(3, K)$ agisce su $G_{3,1}(K) \cong \mathbf{P}^2(K)$.

$P, Q \in GL(3, K)$ inducono la stessa trasformazione di $\mathbf{P}^2(K)$ se e solo se esiste $\lambda \in K \setminus \{0\}$ tale che

$Q = \lambda P$.

Questo definisce l' equivalenza proiettiva su $GL(3, K)$ ed indichiamo con

$\mathbf{P}GL(K)$

il quoziente. Questo è, per definizione, il **gruppo delle trasformazioni proiettive** di $\mathbf{P}^2(K)$.

Recuperiamo le trasformazioni affini considerando il sottogruppo delle traformazioni proiettive per le quali la cella C_3 (quindi la sua retta all'infinito) sono sottoinsiemi invarianti.

Possiamo allora considerare le coniche proiettive a meno di equivalenza proiettiva e sollevare tale equivalenza sulle equazioni (i polinomi di secondo grado omogenei):

$N' \sim_p N$ se e solo se $N' = \lambda Q^t N Q$,

$\lambda \neq 0$, $Q \in GL(3, K)$.

Si recupera la classificazione delle coniche affini restringendo tutto su C_3 e imponendo che sia invariante.

La classificazione proiettiva è più semplice perché il gruppo di trasformazioni è più grande.

Per esempio, su $\mathbb{R}$ la distinzione tra ellissi, iperboli e parabole sparisce; *le coniche proiettive associate sono tutte proiettivamente equivalenti tra loro.*

I tre tipi affini si distinguono tra loro mediante l'intersezione della conica proiettiva associata con con la retta all'infinito di C_3 (vuota, due punti, un punto "doppio" rispettivamente).

Agendo con tutto il gruppo delle trasformazioni proiettive quella rette all' infinito perde il suo carattere speciale e il tipo di intersezione con la conica proiettiva non ha più un carattere intrinseco.