Lo spazio duale

Dato un $\mathbf{K}$-spazio V, il suo *spazio duale*

$V^* := \mathsf{Hom}(V, \mathbf{K})$,

dove $\mathbf{K} = \mathbf{K}^1$ è considerato come $\mathbf{K}$-spazio, munito della base canonica $\mathcal{C} = \{1\}$.

Gli elementi di V^* sono anche detti **funzionali** su V.

Se $\dim V = n$, allora per ogni base $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ di V

$f_B : V^* \to M(1, n, \mathbf{K})$, $\phi \to M_1^B(\phi)$

è un isomorfismo, quindi $\dim V^* = \dim V = n$.

Sia $B^* := \{v_1^*, \dots, v_n^*\}$ la base di V^* tale che

$f_B(v_j^*) = E_j^t$.

Essa è detta la **base duale** (della base B) di V^*.

È caratterizzata dalla seguente proprietà

$v_j^*(v_i) = \delta_{j,i}$

dove $\delta_{j,i} = 1$ se $i = j$, $\delta_{j,i} = 0$ se $i \neq j$.

Per ogni base B di V, è definito l' unico isomorfismo

$$\chi_B : V \to V^*$$

tale che $\chi_B(v_j) = v_j^*$ (cioè $\chi_B(B) = B^*$).

Per ogni V astratto, nessuno di questi isomorfismi è canonico, infatti dipende dalla scelta della base B e, in generale, non ci sono basi privilegiate di V.

Se $V = \mathbf{K}^n$, munito della base canonica $\mathcal{C} = \mathcal{C}_n = \{E^1, \ldots, E^n\}$. Allora

$(\mathbf{K}^n)^* = M(1, n, \mathbf{K})$, $\mathcal{C}^* = \{(E^1)^t, \ldots, (E^n)^t\}$.

$f_{\mathcal{C}} = \chi_{\mathcal{C}} : \mathbf{K}^n \to M(1, n, \mathbf{K}), X \to X^t$

Indichiamo con $\mathcal{V}_{\mathbf{K}}$ la *categoria* i cui **oggett**i sono i $\mathbf{K}$-spazi vettoriali (non necessariamente di dimensione finita) e i **morfismi** (le "*frecce*") sono le applicazioni lineari tra $\mathbf{K}$-spazi. Ricordiamo che la composizione di applicazioni lineari è lineare; per ogni V, id_V è un endomorfismo privilegiato di V; la composizione di isomorfismi è un isomorfismo.

Possiamo considerare l'applicazione da $\mathcal{V}_{\mathbf{K}}$ in se stesso

$\mathcal{V}_{\mathbf{K}} \Rightarrow \mathcal{V}_{\mathbf{K}}, \ V \Rightarrow V^*$.

C'è un modo naturale di estendere questa corrispondenza ai morfismi, in modo **controvariante**.

$f \in \mathrm{Hom}(V, W) \Rightarrow f^t \in \mathrm{Hom}(W^*, V^*)$

dove per ogni $\phi \in W^*, \ f^t(\phi) = \phi \circ f$

f^t è detta l' **applicazione trasposta** di f.

È facile mostrare che

$(g \circ f)^t = f^t \circ g^t$:

$(g \circ f)^t(\phi) = \phi \circ (g \circ f) = (\phi \circ g) \circ f = (f^t \circ g^t)(\phi)$

Per ogni V, $(\mathrm{id}_V)^t = \mathrm{id}_{V^*}$.

Da questo segue che se

$f : V \to W$ è un isomorfismo, allora f^t è un isomorfismo; $(f^t)^{-1} = (f^{-1})^t$.

Si può riassumere quanto detto a proposito di "$\Rightarrow$" dicendo che si tratta di un **functore controvariante** dalla categoria $\mathcal{V}_{\mathbf{K}}$ in se stessa.

Tutto si restringe alla categoria $\mathcal{V}_{\mathbf{K}}^{\mathcal{F}}$ dei $\mathbf{K}$-spazi finitamente generati (cioè di dimensione finita).

Sia $A \in M(m,n,\mathbf{K}) = \mathrm{Hom}(\mathbf{K}^n, \mathbf{K}^m)$,

$A = f_A : \mathbf{K}^n \to \mathbf{K}^m$, $f_A(X) = AX$.

$f_A^t : M(1,m,\mathbf{K}) \to M(1,n,\mathbf{K})$

per ogni $R \in M(1,m)$, per ogni $X \in \mathbf{K}^n$,

$f_A^t(R)(X) = RAX = (A^t R^t)^t X$

$f_A^t(R) = (A^t R^t)^t$.

Se muniamo ogni $M(1,r,\mathbf{K})$ della base canonica $\mathcal{C}_r^*$ (duale della base canonica di $\mathbf{K}^r$), allora

$M_{\mathcal{C}_n^*}^{\mathcal{C}_m^*}(f_A^t) = A^t$.

In generale, dati $\dim V = n$, B una base di V, B^* la base duale di V^*; analogamente, $\dim W = m$, D, D^*, allora per ogni $f \in \mathrm{Hom}(V, W)$

$$M_{B^*}^{D^*}(f^t) = (M_D^B(f))^t$$

■

L'annullatore di un sottospazio

$\dim V = n$, W sottospazio.

$\mathrm{Ann}(W) = \{\phi \in V^*;\ \phi|W = 0\}$.

È Un sottospazio di V^* (verifica per facile esercizio).

Prop. $\dim \mathrm{Ann}(W) = \dim V - \dim W$.

Dim. Sia $\{w_1, \dots, w_k\}$ una base di W. Estendiamo ad una base di V

$B = \{w_1, \dots, w_k, v_1, \dots v_s\}$, $n = k + s$.

Consideriamo la base duale B^*. Affermiamo che $\{v_1^*, \dots, v_s^*\}$ è una base di Ann(W). È evidente che sia contenuta nell'annulatore e che sia fatta di funzionali linearmente indipendenti. Dimostriamo che genera l' annullatore. Sia ϕ nell'annullatore. Certamente

$\phi = \sum_h a_h w_h^* + \sum_j b_j v_j^*$

Per ogni w_i

$0 = \phi(w_i) = a_i$

quindi tutti gli a_i sono nulli per cui

$\phi = \sum_j b_j v_j^*$

∎

Prop. $\dim V = n$, $\dim W = m$, $f \in \mathrm{Hom}(V, W)$. *Allora*

$$\dim \mathrm{Im}(f) = \dim \mathrm{Im}(f^t)$$

Dim. Per la formula della dimensione

$$\dim W^* = \dim W = \dim \mathrm{Im}(f^t) + \dim \ker(f^t)$$

$$\ker(f^t) = \{\phi \in W^*; \phi \circ f = 0\} = \mathrm{Ann}(\mathrm{Im}(f)).$$

Da cui

$$\dim W = \dim \mathrm{Im}(f^t) + \dim W - \dim \mathrm{Im}(f)$$

$$\dim \mathrm{Im}(f) = \dim \mathrm{Im}(f^t)$$

■

Come corollario, otteniamo una ulteriore dimostrazione che

Per ogni $A \in M(m, n, \mathbf{K})$, rank$A =$ rankA^t.

■

Il biduale - isomorfismi canonici

Per ogni $\mathbf{K}$-spazio V, $(V^*)^* := V^{**}$ è detto lo spazio **biduale** di V.

Se $\dim V = n$, allora $\dim V^{**} = n$ e i due spazi sono isomorfi.

In effetti, per ogni B base di V,

$$\chi_{B^*} \circ \chi_B : V \to V^{**}$$

è un isomorfismo in quanto composizione di isomorfismi. A priori dipende dalla scelta della base B.

Esiste un isomorfismo canonico

$\chi : V \to V^{**}$

cioè che non dipende da alcuna scelta arbitraria.

Per ogni $v \in V$, definiamo

$\chi(v) : V^* \to \mathbf{K}$

tale che per ogni $\phi \in V^*$,

$\chi(v)(\phi) = \phi(v) \in \mathbf{K}$.

Ci sono alcune verifiche da fare.

(1) Per ogni $v \in V$, $\chi(v) \in V^{**}$ cioè è un funzionale lineare definito su V^*.

$\chi(v)(\phi + \psi) = (\phi + \psi)(v) = \phi(v) + \psi(v) = \chi(v)(\phi) + \chi(v)(\psi)$

...

(2) χ è lineare.

$\chi(v + v')(\phi) = \phi(v + v') = \phi(v) + \phi(v') = \chi(v)(\phi) + \chi(v')(\phi)$

...

Resta da dimostrare che χ è un isomorfismo. Poiché sappiamo che $\dim V = \dim V^{**}$, basta dimostrare che $\ker\chi = \{0\}$.

$\ker\chi = \{v \in V; \forall\phi \in V^*, \phi(v) = 0\}$.

Se $v \neq 0$, sia $B = \{v = v_1, \ldots, v_n\}$ una base di V. Consideriamo B^*. Allora $v_1^*(v) = 1 \neq 0$. Quindi $v \notin \ker(\chi)$.

$\blacksquare$

$\dim V = n$. *Per ogni base* B *di* V,

$\chi_{B^*} \circ \chi_B = \chi$.

In particolare, non dipende dalla scelta di B.

Dim. Per esercizio.

$\blacksquare$

Un altro isomorfismo canonico

V, W, Z $\mathbf{K}$-spazi. $f : V \times W \to Z$.

Fissato arbitrariamente $w_0 \in W$, poniamo

$f_{w_0} : V \to Z, \; f_{w_0}(v) = f(v, w_0)$;

fissato $v_0 \in V$, poniamo

$f_{v_0} : W \to Z, \; f_{v_0}(w) = f(v_0, w)$.

f si dice **bilineare** se per ogni $w_0 \in W$, f_{w_0} è lineare , per ogni $v_0 \in V$, f_{v_0} è lineare.

Indichiamo con

$$\text{Bil}(V \times W, Z)$$

l'insieme di queste applicazioni bilineari. È in modo naturale un $\mathbf{K}$-spazio:

$$(\phi + \psi)(v, w) := \phi(v, w) + \psi(v, w)$$

$$(\lambda\phi)(v, w) = \lambda\phi(v, w)$$

...

Consideriamo in particolare $\mathrm{Bil}(V \times V^*, \mathbf{K})$.

Se $\dim V = n$, allora $\dim \mathrm{Bil}(V \times V^*, \mathbf{K}) = n^2$

Dim. Fissata una base $B = \{v_j\}$ di V con l'associata base duale $B^* = \{v_j^*\}$ di V^* definiamo

$M_B(\cdot) : \mathrm{Bil}(V \times V^*, \mathbf{K}) \to M(n, \mathbf{K})$

$M_B(\Phi) = (\Phi(v_i, v_j^*))_{i=1,\ldots,n;j=1,\ldots,n}$

Per ogni $(v, \psi) \in V \times V^*$,

$\Phi(v, \psi) = [\psi]^t_{B^*} M_B(\Phi)[v]_B.$

Si verifica che $M_B(\cdot)$ è un isomorfismo (farlo per esercizio).

$\blacksquare$

Definiamo

$\chi : \mathsf{End}(V) \to \mathsf{Bil}(V \times V^*, \mathbf{K})$

$\chi(f)(v, \phi) = \phi(f(v)) \in \mathbf{K}$*.*

χ *è un isomorfismo (canonico perché non dipende da alcuna scelta arbitraria).*

Dim. Lasciamo per esercizio le verifiche che per ogni f, $\chi(f)$ è bilineare e che χ è lineare. Poiché sappiamo che gli spazi hanno la stessa dimensione, per dimostrare che χ è un isomorfismo, basta dimostrare che $\ker(\chi) = \{0\}$.

$\ker(\chi) = \{f \in \text{End};\ \forall (v, \phi), \phi(f(v)) = 0\}$.

Se $f \neq 0$, esiste $v \in V$ tale che $f(v) \neq 0$. Sia $B = \{v_1 = f(v), v_2, \ldots, v_n\}$ una base di V con l'associata base duale B^*. Allora $v_1^*(f(v)) = 1 \neq 0$, quindi $f \notin \ker(\chi)$.

■

Cenni sul duale (biduale) degli spazi non finitamente generati

Vogliamo mostrare che il comportamento del duale e del biduale è **radicalmente diverso** se consideriamo spazi **non** finitamente generati.

Sia dunque V un tale spazio e supponiamo di più che sia munito di una base B (necessariamente infinita).

Oss. Una base di V è sia un sottoinsieme massimale (rispetto a $\subset$) di V formato da vettori linearmente indipendenti, sia un sottoinsieme minimale che genera V. Usando il *lemma di Zorn* (equivalentemente, l'assioma della scelta) si può dimostrare che ogni V ammette basi. Per evitare queste questioni delicate della teoria degli insiemi, per semplicità, lo assumiamo per ipotesi.

Il discorso non sarà vuoto, perché conosciamo almeno l'esempio di $\mathbf{K}[t]$ munito della base canonica (numerabile) $\mathcal{C} = \{1 = t^0, t^1, \ldots, t^n, \ldots\}$.

Fatto. *Due spazi (muniti di basi) sono isomorfi se e solo se sono muniti di basi della stessa cardinalità.*

Dim. Se $f : V \to W$ è un isomorfismo e B è una base di V, allora $D = f(B)$ è una base di W della stessa cardinalità ($f|B : B \to D$ è bigettiva). Viceversa, se B e D sono basi di V e W rispettivamente e $f_0 : B \to D$ è bigettiva, allora esiste un' unica applicazione lineare $f : V \to W$ che estende f_0 ed è un isomorfismo.

∎

Ogni funzionale $\phi \in V^*$ è univocamente determinato dai valori che assume sui vettori della base B. Questo ci permette di identificare

$V^* = \mathbf{K}^B$

Possiamo definire $B^* \subset V^*$, come nel caso in cui B sia finita, ponendo per ogni $b \in B$, b^* definito dalla proprietà che per ogni $b' \in B$,

$b^*(b') = 1$ se $b = b'$, $b^*(b') = 0$ se $b \neq b'$.

Indichiamo con $F(B) = \text{span}(B^*) \subset V^*$

Esiste un' unico isomorfismo lineare

$\chi_B : V \to F(B)$

tale che per ogni $b \in B$, $\chi_B(b) = b^*$.

Questo permette di identificare V con il sottospazio $F(B)$ di V^*. In effetti $F(B)$ è il sottospazio di $\mathbf{K}^B$ formato dalle funzioni

$f : B \to \mathbf{K}$ a **supporto finito**.

Quando B è finita, abbiamo visto che $F(B) = V^*$. L'idea è che se B è infinita, allora $F(B)$ è molto "più piccolo" di tutto $V^* = \mathbf{K}^B$.

Esempio. Sia $\mathbf{K} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{0, 1\}$. Allora $\{0, 1\}^B$ è in corrispondenza biunivoca con l' insieme delle parti $\mathcal{P}(B)$. Mentre $F(B)$ corrisponde a $\mathcal{P}_{\mathcal{F}}(B) \subset \mathcal{P}(B)$ formato dai sottoinsiemi **finiti** di B.

Questo suggerisce che per ragioni di cardinalità, non può esserci alcuna applicazione bigettiva (quindi alcun isomorfismo) tra $V \sim F(B)$ e il suo duale $V^* = \mathbf{K}^B$.

Ci limitiamo a sviluppare questa idea quando B è numerabile ($\mathbf{K}$ arbitrario), In questo caso $V^* \sim \mathbf{K}^B \sim \mathbf{K}^{\mathbb{N}}$ mentre $V \sim F(B) \sim \mathbf{K}[t]$.

Fatto. *Ogni sottoinsieme infinito di V formato da vettori linearmente indipendenti è numerabile. In particolare tutte le basi di V sono numerabili.*

Dim. Siccome l'affermazione è chiaramente invariante per isomorfismi, possiamo considerare $V = \mathbf{K}[t]$. $\mathbf{K}[t] = \cup_{d \in \mathbb{N}} \mathbf{K}_d[t]$. Se $X \subset \mathbf{K}[t]$ è formato da polinomi indipendenti, lo stesso vale per $X_d = X \cap \mathbf{K}_d[t]$. Siccome $\dim \mathbf{K}_d[t] = d+1$, ogni X_d è finito e $|X_d| \leq d+1$. $X = \cup_d X_d$; se X è infinito, X è unione numerabile di insiemi finiti. Quindi X è numerabile.

$\blacksquare$

Funzionali di valutazione

Per ogni $\lambda \in \mathbf{K}$, sia $\phi_\lambda \in (\mathbf{K}[t])^*$ definito da

$$\phi_\lambda : \mathbf{K}[t] \to \mathbf{K}, \ \phi_\lambda(p(t)) = p(\lambda)$$

I funzionali della famiglia $\{\phi_\lambda\}_{\lambda \in \mathbf{K}}$ *sono linearmente indipendenti.*

Dim. Se $\Phi := \sum_{j=1}^{k} a_j \phi_{\lambda_j} = 0$, vogliamo dimostrare che tutti gli a_j sono nulli.

Consideriamo $P(t) = \prod_{j=1}^{k} (t - \lambda_j)$ e per ogni $j = 1, \dots, k$, $P_j(t)$ ottenuto eliminando da $P(t)$ il fattore $(t - \lambda_j)$. Allora

$$\Phi(P_j(t)) = a_j P_j(\lambda_j) = 0$$

$a_j = 0$ perché $P_j(\lambda_j) \neq 0$.

■

Mettendo insieme tutte le cose osservate, infine abbiamo:

Sia V munito di una base numerabile B.

(1) Tutte le basi di V sono numerabili.

(2) V^* non ammette basi numerabili, quindi V e V^* non possono essere isomorfi.

Dim. Resta da dimostrare il punto (2). Possiamo supporre $V = \mathbf{K}[t]$. Se $\mathbf{K}$ è più che numerabile (ad esempio $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$), allora V^* ammette un insieme più che numerabile di funzionali linearmente indipendenti. Quindi non può avere una base numerabile.

Se $\mathbf{K}$ è finito o numerabile (ad esempio $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$), allora $\mathbf{K}[t] = \cup_d \mathbf{K}_d[t]$ è numerabile in quanto unione numerabile di insiemi finiti o numerabili. D' altra parte, poiché $\mathbf{K}$ ha almeno due elementi, per l' **argomento della diagonale di Cantor**, $\mathbf{K}^{\mathbb{N}}$ è più che numerabile (in effetti non esistono applicazioni surgettive $f : \mathbb{N} \to \mathbf{K}^{\mathbb{N}}$).

$\blacksquare$

Ammettendo che anche $V^* = \mathbf{K}^{\mathbb{N}}$ abbia una base $\mathcal{B}$ (necessariamente non numerabile), allora come al solito possiamo idendificare $\mathbf{K}^{\mathbb{N}}$ con il sottospazio $F(\mathcal{B})$ del biduale V^{**}. Quindi (a maggior ragione) anche V^{**} non ammette basi numerabili. L'applicazione canonica

$$\chi : V \to V^{**}$$

è definita come nel caso di dimensione finita ed è iniettiva. **Non** è surgettiva.