Endomorfismi

V $\mathbf{K}$-spazio, $\dim V = n$.

Definiamo l'applicazione

$GL(V) \to S(\text{End}(V))$

$h \to \phi_h : \text{End}(V) \to \text{End}(V), \phi_h(f) = h \circ f \circ h^{-1}$

$\phi_h \circ \phi_k(f) = h \circ (k \circ f \circ k^{-1}) \circ h^{-1} =$

$(h \circ k) \circ f \circ (h \circ k)^{-1} = \phi_{h \circ k}$

questo permette di considerare $GL(V)$ come un gruppo di trasformazioni di End(V) e possiamo considerare la relazione di equivalenza associata.

Quindi

$g \sim f$, se esiste $h \in GL(V)$ tale che

$g = h \circ f \circ h^{-1}$.

In tal caso si dice che i due endomorfismi sono **coniugati**.

Nel caso in cui $V = \mathbf{K}^n$, End$(V) = M(n, \mathbf{K})$, la relazione diventa

$B \sim A$ se esiste $P \in GL(n, \mathbf{K})$ tale che

$B = PAP^{-1}$

In tal caso si usa dire che le matrici B e A sono **simili**.

Ci proponiamo di studiare gli insiemi quoziente.

Diverse caratterizzazioni dell'equivalenza

I seguenti fatti sono tra loro equivalenti

(1) $g, f \in \mathrm{End}(V)$ *sono coniugati.*

(2) Per ogni base B *di* V, $M_B^B(g)$ *e* $M_B^B(f)$ *sono simili.*

(3) Esiste B *base d* V *tale che* $M_B^B(g)$ *e* $M_B^B(f)$ *sono simili.*

(4) Esistono basi B *e* B' *di* V *tali che*

$M_{B'}^{B'}(g) = M_B^B(f)$.

Si ragiona in modo analogo a quanto già fatto per la DS-equivalenza; gli ingredienti sono:

1) Fissata una base B di V; l'isomorfismo

$$M_B^B(*) : \mathsf{End}(V) \to M(n, \mathbf{K})$$

è tale che se $g \sim f$ allora $M_B^B(g)$ e $M_B^B(f)$ sono matrici simili;

2) La "relatività".

Si tratta di una specializzazione della DS- equivalenza, quindi $\dim \mathrm{Im}$ (il rango nel caso delle matrici) è un primo invariante.

Possiamo dire subito che due matrici del tipo λI_n, μI_n sono simili se e solo se $\lambda = \mu$. Più precisamente

$$P(\lambda I_n)P^{-1} = \lambda PP^{-1} = \lambda I_n$$

per cui la classe di equivalenza $[\lambda I_n] = \{\lambda I_n\}$.

Quindi se $\mathbf{K}$ è infinito, esistono infinite classi di equivalenza distinte. Il rango è un invariante troppo debole: "**alla ricerca di nuovi invarianti**".

Il determinante

(Il caso 2×2*)* Vale il seguente lemma

Lemma *Sia* $A = (a_{i,j})_{i=1,2;j=1,2} \in M(2, \mathbf{K})$*. Allora* $A \in GL(2, \mathbf{K})$ *se e solo se*

$$a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1} \neq 0.$$

Dim. Usare l' algoritmo di Gauss (per esempio, sulle righe) per determinare quando A non è di rango 2 e verificare che questo accade se e solo se $a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1} = 0$

■

Definiamo

$\det = \det_2 : M(2, \mathbf{K}) \to \mathbf{K}$

$\det A = a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1}$

Si chiama la funzione **determinante** (2×2); è una funzione polinomiale di grado 2 delle entrate delle matrici. Determina una proprietà importante di ogni matrice, cioè se è o no invertibile.

Idea: *Individuare un sistema minimale di proprietà (che saranno dette "**assiomatiche**") che caratterizzino in modo univoco questa funzione.*

Proprietà assiomatiche di $\det_2$**.**

1) Identifichiamo $M(2,\mathbf{K})$ con $(\mathbf{K}^2)^2$ considerando le colonne ordinate di $A \in M(2,\mathbf{K})$ come una coppia ordinata di elementi di $\mathbf{K}^2$. Allora det è una **funzione bilineare** delle colonne.

2) Se $A \in M(2,\mathbf{K})$ ha due colonne uguali (scriveremo $A = (X, X)$) allora $\det A = 0$.

3) $\det(I_2) = 1$.

Proprietà derivate del determinante

- $\det(X, Y) = -\det(Y, X)$

Dim. $0 = \det(X+Y, X+Y) = \det(X, X) + \det(X, Y) + \det(Y, X) + \det(Y, Y) =$

$\det(X, Y) + \det(Y, X)$.

$\blacksquare$

• **(Unicità)** $\det_2$ *è l'unica funzione che verifica le tre proprietà assiomatiche.*

Dim. Sia D una funzione che soddisfi le tre proprietà assiomatiche.

Data $A = (a_{i,j})$, esprimiamo ogni colonna di A come combinazione lineare dei vettori E^1, E^2 della base canonica di $\mathbf{K}^2$.

$A = (a_{1,1}E^1 + a_{2,1}E^2, a_{1,2}E^1 + a_{2,2}E^2)$

Sviluppiamo completamente $D(A)$ usando la bilinearità rispetto alle colonne, trascurando tutti i termini con due colonne uguali che danno contributo nullo

Otteniamo:

$$D(A) = a_{1,1}a_{2,2}D(E^1, E^2) + a_{2,1}a_{1,2}D(E^2, E^1) =$$

$$a_{1,1}a_{2,2}D(E^1, E^2) - a_{2,1}a_{1,2}D(E^1, E^2) =$$

$$a_{1,1}a_{2,2} - a_{2,1}a_{1,2} = \det(A)$$

$\blacksquare$

Per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$, sia D_λ una funzione che verifichi le prime due proprietà assiomatiche, mentre la terza è sostituita da $D_\lambda(I_2) = \lambda$.

La stessa dimostrazione dell' unicità permette di concludere che allora

$D_\lambda = \lambda \, \mathrm{det}$.

In particolare $\mathrm{det} = D_1$.

Formula del prodotto, detta anche "di Binet"

Per ogni $B, A \in M(2, \mathbf{K})$,

$\det(BA) = \det(B)\det(A)$.

Dim. Consideriamo B fissata e facciamo variare A. Si verifica allora che la funzione che associa ad ogni A lo scalare $\det(BA)$, in effetti coincide con $D_{\det B}$.

$\blacksquare$

$A \in M(2, \mathbf{K})$ *è invertibile se e solo se* $\det A \neq 0$.

Dimostrazione **via le proprietà assiomatiche:**
Se A è invertibile, allora

$$1 = \det(I_2) = \det(AA^{-1}) = \det(A)\det(A^{-1})$$

quindi $\det A \neq 0$ (di più: $\det(A^1) = (\det(A))^{-1}$)

Se A non è invertibile, allora la seconda colonna $Y = \lambda X$, da cui

$$\det(A) = \det(X, \lambda X) = \lambda \det(X, X) = 0$$

■

Invarianza per matrici simili

Se $B = PAP^{-1}$*, allora* $\det(B) = \det(A)$*.*

Dim. $\det(B) = \det(P)\det(A)\det(P^{-1}) =$

$\det(A)\det(PP^{-1}) = \det(A)$.

$\blacksquare$

Se $\dim V = 2$, *per ogni* B *base di* V *scelta in modo arbitrario, definiamo*

$$\det : \mathrm{End}(V) \to \mathbf{K},\ \det(f) = \det M_B^B(f)$$

Allora questa funzione è ben definita cioè non dipende dalla scelta di B. $f \in GL(V)$ *se e solo se* $\det(f) \neq 0$.

Dim. Per scelte diverse della base si ottengono matrici simili.

$\blacksquare$

Per ogni V, $\dim(V) = 2$, sia

$\Lambda^2(V) =$

$\{\Phi \in \mathrm{Bil}(V \times V, \mathbf{K});\ \forall v \in V, \Phi(v, v) = 0\}$

Allora esso è un sottospazio di dimensione uguale a 1 di $\mathrm{Bil}(V \times V, \mathbf{K})$. La funzione det è una base.

$\blacksquare$

Nel caso di dimensione 2, possiamo quindi aggiungere det a $\dim \mathrm{Im}$ (al rango) tra gli invarianti a meno di coniugazione (di similitudine).

Non bastano. Ad esempio I_2 e $-I_2$ non sono simili ma hanno lo stesso rango e lo stesso determinante.

Vogliamo estendere la definizione del determinante al caso $n \times n$ arbitrario. Procediamo in modo assiomatico:

Una funzione

$D : M(n, \mathbf{K}) \to \mathbf{K}$

è *un determinante* se verifica le seguenti proprietà assiomatiche:

1) È **multilineare** rispetto alle colonne.

2) $D(\dots, X, X, \dots) = 0$, cioè se una matrice A ha due colonne adiacenti uguali, allora

$D(A) = 0$.

3) $D(I_n) = 1$.

Vogliamo dimostrare che **una funzione determinante esiste ed è unica**; inoltre troveremo modi effettivi di calcolarla. Adatteremo in modo diretto quanto già fatto per $n = 2$.

- $D(\dots, X, Y, \dots) = -D(\dots, Y, X, \dots)$.

Dim. $D(\dots, X+Y, X+Y, \dots) = 0$. Sviluppare completamente il primo termine, usando la bilinearità e trascurando i termini con due colonne adiacenti uguali; la tesi segue immediatamente.

$\blacksquare$

$D(\ldots, X, \ldots, X, \ldots) = 0$

Dim. Ci riconduciamo a $D(\ldots, X, X, \ldots) = 0$ effettuando una successione di scambi di due colonne che cambiano il segno ($0 = \pm 0$).

$\blacksquare$

$$D(\dots, X, \dots, Y, \dots) = -D(\dots, Y, \dots, X, \dots)$$

Dim. Facendo successivi scambi, diciamo r, di due colonne trasformiamo $D(\dots, X, \dots, Y, \dots)$ in $D(\dots, X, Y, \dots)$. Facendo gli stessi r scambi ma in verso contrario, trasformiamo $D(\dots, Y, X, \dots)$ in $D(\dots, Y, \dots, X, \dots)$.

■

Unicità

Premettiamo alcuni richiami sulle permutazioni.

Sia S_n il gruppo delle permutazioni di $\{1, 2, \ldots, n\}$

Ogni $\sigma \in S_n$ si scrive in modo unico come prodotto di **cicli** con supporti disgiunti, quindi che commutano tra loro

$\sigma = c_1 \circ c_2 \circ \cdots \circ c_k.$

Ogni ciclo c di lunghezza $l(c)$ si scrive come composizione di $l(c) - 1$ **trasposizioni** (cioè cicli di lunghezza 2).

Quindi σ si scrive come composizione di

$p(\sigma) = \sum_{j=1}^{k} (l(c_j) - 1)$

trasposizioni.

Il numero $(-1)^{p(\sigma)} \in \{\pm 1\}$ è detta la **parità** della permutazione.

Per ogni $\sigma \in S_n$, indichiamo

$$\sigma(I_n) := (E^{\sigma(1)}, \ldots, E^{\sigma(n)})$$

cioè la matrice che si ottiene da I_n permutando le sue colonne secondo σ. Si noti che

$$D(\sigma(I_n)) = (-1)^{p(\sigma)}$$

Data $A \in M(n, \mathbf{K})$, per calcolare $D(A)$:

I) scriviamo ogni colonna come combinazione lineare dei vettori $\{E^1, \ldots, E^n\}$ della base canonica di $\mathbf{K}^n$

II) Sviluppiamo totalmente usando la multilinearità rispetto alle colonne, trascurando i termini con due colonne uguali che danno contributo nullo.

Si ottiene

$D(A) = \sum_{\sigma \in S_n} a_{\sigma(1),1} \ldots a_{\sigma(n),n} D(\sigma(I_n)) =$

$\sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{p(\sigma)} a_{\sigma(1),1} \ldots a_{\sigma(n),n}$

Quindi, *se una funzione determinante* $n \times n$ *esiste*, allora essa è unica (indicata con det $=$ $\det_n$). Di più la formula precedente permetterebbe di calcolare esplicitamente $\det(A)$ per ogni $A \in M(n, \mathbf{K})$. Ammesso che esista, allora det è una funzione polinomiale di grado n dei coefficienti delle matrici.

Un modo per dimostrare l'esistenza consiste nel **verificare che la funzione definita da quella formula soddisfa le tre proprietà assiomatiche.**

Lo lasciamo per esercizio.

Dimostreremo l'esistenza per altra via, fornendo tra l'altro un altro modo di calcolare $\det(A)$.

Procediamo per induzione su $n \geq 1$. $\det_n$ indica la funzione determinante $n \times n$.

Passo iniziale: Poniamo $\det_1(a) = a$.

Passo induttivo: Per ogni $n \geq 1$, supponiamo di disporre di $\det_n$ e definiamo $\det_{n+1}$ implementando la seguente procedura:

Si fissa arbitrariamente un indice di riga $i \in \{1, \ldots, n+1\}$. Per ogni matrice A di formato $(n+1) \times (n+1)$, per ogni indice di colonna $j \in \{1, \ldots, n+1\}$, indichiamo con $A_{i,j}$ la sottomatrice $n \times n$ ottenuta cancellando la i-esima riga e la j-esima colonna di A. Definiamo allora

$$\det_{n+1}(A) = \sum_{j=1}^{n+1} (-1)^{i+j} a_{i,j} \det_n(A_{i,j})$$

Oss. Calcolando $\det_2$ si riottiene il determinante 2×2 già noto.

Resta da verificare che la funzione così definita per induzione soddisfa le tre proprietà assiomatiche del determinante $(n+1) \times (n+1)$. Una volta fatto questo, per l'unicità del determinante, avremo anche che il risultato non dipende dalla scelta arbitraria dell'indice di riga i.

Verifiche

Multilinearità. Basta dimostrare che ogni addendo $(-1)^{i+j} a_{i,j} \det_n(A_{i,j})$ è una funzione multilineare delle colonne. Consideriamo un indice di colonna k. Vogliamo verificare che l'addendo è lineare rispetto alla k-esima colonna.

Ci sono due possibilità: $k = j$, $k \neq j$.

Se $k = j$, $a_{i,k}$ è la i-esima componente della colonna, quindi è una funzione lineare della k-esima colonna. D'altra parte $(-1)^{i+k} \det(A_{i,k})$ non varia al variare della k-esima colonna, è una costante. Quindi complessivamente l'addendo è una funzione lineare della k-esima colonna.

Se $k \neq j$, allora $(-1)^{i+j}a_{i,j}$ è una costante rispetto alla k-esima colonna. D'altra parte, per ipotesi induttiva, $\det_n$ è multilineare rispetto alle colonne. Dipende da n componenti della k-esima colonna che a loro volta, dipendono linearmente dalla k-esima colonna di A. Si conclude perché la composizione di applicazioni lineari è lineare.

$\blacksquare$

Consideriamo $A = (\dots, X, X, \dots)$,

$X = A^j = A^{j+1}$, da cui

$a_{i,j} = a_{i,j+1}$, $A_{i,j} = A_{i,j+1}$.

Usando la formula che definisce $\det_{n+1}$ e il fatto che per l' ipotesi induttiva, $\det_n$ è il determinante $n \times n$, vediamo che

$\det_{n+1}(A) =$

$(-1)^{i+j} a_{i,j} \det_n(A_{i,j}) + (-1)^{i+j+1} a_{i,j+1} \det_n(A_{i,j+1})$

$= 0.$

$\blacksquare$

Resta da dimostrare che $\det_{n+1}(I_{n+1}) = 1$.

È lasciato per esercizio.

$\blacksquare$

A questo punto, le altre proprietà derivate del determinante si ottengono grazie a modifiche minori di quanto già fatto nel caso 2×2.

$\det(BA) = \det(B)\det(A)$

A è invertibile se e solo se $\det A \neq 0$.

Se $B = PAP^{-1}$, allora $\det(A) = \det(B)$

Per ogni V, $\dim V = n$*, per ogni base B di V, per ogni $f \in$* $\mathrm{End}(V)$*, è ben definito*

$\det(f) = \det M_B^B(f)$

$\Lambda^n(V)$*, lo spazio delle applicazioni multilineari* $\mathrm{Mult}(V^n, \mathbf{K})$ *tali che* $\Phi(\ldots, v, v, \ldots) = 0$ *ha dimensione uguale a 1 e il determinante è una base.*

I dettagli sono lasciati per esercizio.

Complementi

$\det(A) = \det(A^t)$

Dim. Si ricordi che $\sigma \to \sigma^{-1}$ è una trasformazione di S_n e che $p(\sigma) = p(\sigma^{-1})$.

$A = (a_{i,j})$, $A^t = (b_{i,j})$, $b_{i,j} = a_{j,i}$.

$\det(A^t) = \sum_{\sigma\in S_n}(-1)^{p(\sigma)} b_{\sigma(1),1} \dots b_{\sigma(n),n} =$

$\sum_{\sigma\in S_n}(-1)^{p(\sigma)} a_{1,\sigma(1)} \dots a_{n,\sigma(n)} =$

$\sum_{\sigma\in S_n}(-1)^{p(\sigma)} a_{\sigma^{-1}(1),1} \dots a_{\sigma^{-1}(n),n} =$

$\sum_{\sigma\in S_n}(-1)^{p(\sigma^{-1})} a_{\sigma^{-1}(1),1} \dots a_{\sigma^{-1}(n),n} =$

$\det(A)$.

$\blacksquare$

Aspetti computazionali

Il calcolo del determinante usando la formula con le permutazioni è molto costosa. Occorre fare $n(n!)$ operazioni tra somme e prodotti.

Dato che $\det(A) = \det(A^t)$, possiamo sviluppare rispetto ad una riga o ad una colonna scelte a piacere. Più le righe o le colonne scelte contengono zeri, più risparmiamo operazioni.

Per esempio, se A è triangolare superiore, $\det(A)$ coincide con il prodotto dei coefficienti $a_{i,i}$ lungo la diagonale.

Se $A = (P, Q)$ è una matrice diagonale a blocchi, allora $\det(A) = \det(P)\det(Q)$.

Si può calcolare il determinante per mezzo dell' **algoritmo di Gauss**, che è computazionalmente molto conveniente (il numero delle operazioni aritmetiche da fare dipende in modo polinomiale da n).

$A \to \hat{A}_C$; se il rango è minore di n, allora $\det(A) = 0$.

Altrimenti, completiamo $A \to \tilde{A}_C = I_n$ ottenendo la corrispondente espressione

$$A^{-1} = E_1 E_2 \ldots E_k$$

dove ogni E_j è una matrice elementare rispetto alle colonne.

Per Binet, $\det(A^{-1}) = \det(E_1) \ldots \det(E_k)$;

Analizzando $\det E$ tipo per tipo abbiamo:

E primo tipo, $C_i \leftrightarrow C_j$: $\det(E) = -1$;

Secondo tipo, $C_i \to \lambda C_i$: $\det E = \lambda$

Terzo tipo, $C_i \to C_i + cC_j$: $\det(E) = 1$

■

Formula di Cramer

Consideriamo un sistema lineare

$AX = D$, $A \in M(n, \mathbf{K})$.

Per ogni indice di colonna j, sia $A(D)_j$ la matrice ottenuta sostituendo la j-esima colonna di A con D.

Sia $X \in \mathbf{K}^n$, una soluzione del sistema (ammesso che esista); allora, per ogni indice di riga i vale l'identità

$x_i \det(A) = \det(A(D)_i)$

Se $\det(A) \neq 0$, allora il sistema ha un'unica soluzione che si può esplicitare:

$x_i = \det(A(D)_i)(\det(A))^{-1}$

■

Formula determinantale per l'inversa

Sia A invertibile. Trovare l'inversa equivale a risolvere gli n sistemi lineari

$$AX^j = E^j,\ j = 1, \ldots n$$

dove X^j è la j-esima colonna incognita di A^{-1}.

Se $x_{i,j}$ è un coefficiente di A^{-1}, possiamo esplicitarlo usando la formula di Cramer

$$x_{i,j} = \det(A(E^j)_i)\det(A))^{-1}$$

Informazione strutturale: A^{-1} è una funzione **razionale** dei coefficienti di A.

∎

Il caso $\mathrm{K} = \mathrm{R}$

In questo caso det ha un chiaro significato geometrico.

Consideriamo per semplicità, $\mathbb{R}^2$. Una base ordinata $\{X^1, X^2\}$ di $\mathbb{R}^2$ individua il parallelogramma $P = P(X^1, X^2)$ di vertici $(0,0)^t$, X^1, X^2, $X^1 + X^2$. Affermiamo che

$$\det(X^1, X^2) = \pm \text{Area} P(X^1, X^2).$$

Dim. Se $X^1 = (a, 0)^t$, $X^2 = (c, d)^t$, $d > 0$, allora

$$\text{Area } P(X^1, X^2) = ad = \det(X^1, X^2)$$

Se $d < 0$, allora

$$\det(X^1, X^2) = -\text{Area} P(X^1, X^2)$$

Se X^1, X^2 non sono linearmente indipendeti, il parallelogramma generato è **degenerato** e ha senso porre

Area $P(X^1, X^2) = \text{det}(X^1, X^2) = 0$

Se X^1, X^2 è una base generica, esiste una rotazione R_θ tale che

$R_\theta(X^1, X^2) = ((a, 0)^t, (b, c)^t)$

$\text{det}\, R_\theta\, \text{det}(X^1, X^2) = \text{det}(X^1, X^2) =$

$\pm \text{Area} P(R_\theta X^1, R_\theta X^2) = \pm \text{Area} P(X^1, X^2)$

$\blacksquare$

Quindi $\det(X^1, X^2)$ corrisponde all' **area orientata** di $P(X^1, X^2)$.

Per chiarire il significato dell'orientazione, consideriamo un arbitrario $\mathbb{R}$-spazio V, $\dim V = n$. Allora diciamo che due basi B e B' di V sono **co-orientate** se $\det M^B_{B'}(\mathrm{Id}_V) > 0$. Grazie alle proprietà del determinante (in particolare Binet) questo definisce una relazione di equivalenza sull'insieme $\mathcal{B}(V)$ delle basi di V. Il quoziente consiste di due classi di equivalenza. Ogni classe è detta un' **orientazione** di V.

Se $V = \mathbb{R}^n$, una base B è positiva se è coorientata con la base canonica di $\mathbb{R}^n$.

Nel caso di $\mathbb{R}^2$, il segno nella relazione

$$\det(X^1, X^2) = \pm \mathrm{Area} P(X^1, X^2)$$

è positivo se e solo se la base X^1, X^2 è positiva.