April 11, 2017

FIBRATI

• La costruzione del fibrato tangente si presta ad un'ampia generalizzazione.

Un *gruppo di Lie* $(G, *)$ è per definizione una varietà liscia G munita di un'operazione di gruppo $* : G \times G \to G$ che è liscia e tale che anche l'applicazione $G \to G$, $g \to g^{-1}$ è liscia. $GL(n)$ e gli altri familiari gruppi di matrici sono esempi tipici di gruppi di Lie. Un gruppo finito o numerabile munito della topologia discreta è un gruppo di Lie.

Data una varietà liscia F, indichiamo con $\mathrm{Aut}(F)$ il gruppo degli automorfismi lisci di F, dove l' operazione è data dalla composizione. Supponiamo che un gruppo di Lie G sia realizzato come sottogruppo di $\mathrm{Aut}(F)$. Allora G *agisce (a sinistra)* su F mediante l'azione

$$G \times F \to F,\ (g, f) \to g(f)\ .$$

- Ad esempio se $F = \mathbb{R}^n$, l'inclusione di $GL(n)$ in $\mathrm{Aut}(\mathbb{R}^n)$ determina l'usuale azione di $GL(n)$ su $\mathbb{R}^n$ via trasformazioni lineari.

- Un gruppo di Lie G si realizza come sottogruppo di $\mathrm{Aut}(G)$ associando ad ogni $g \in G$ la trasformazione $L_g : G \to G$, $L_g(h) = gh$ per ogni $h \in G$. L'azione associata di G su G stesso è detta per "moltiplicazione a sinistra".

Sia M una n-varietà liscia munita di un atlante differenziale (non necessariamente massimale) $\{U_j, \phi_j)\}_{j\in J}$. Un *cociclo liscio definito sul ricoprimento aperto* $\{U_j\}$ *di* M *a valori nel gruppo di Lie* G è una famiglia di applicazioni

$$\mathfrak{c} = \{\mu_{j,i} : U_i \cap U_j \to G\}_{(i,j)\in J^2}$$

tale che

(1) Per ogni $(i, j) \in J^2$, $\mu_{j,i}$ è liscia;
(2) Per ogni $i \in J$, per ogni $x \in U_i$, $\mu_{i,i}(x) = I$;
(3) Per ogni $(i, j) \in J^2$, per ogni $x \in U_i \cap U_j$, $\mu_{j,i}(x) = \mu_{i,j}(x)^{-1} \in GL(n)$;
(4) Per ogni $(i, j, k) \in J^3$, per ogni $x \in U_i \cap U_j \cap U_k$, $\mu_{i,k}(x)\mu_{k,j}(x)\mu_{j,i}(x) = I$.

Supponiamo $G \subset \mathrm{Aut}(F)$ come sopra, con l'associata azione di G su F.

- Ricordiamo che nel caso del fibrato tangente, $G = GL(n)$, $F = \mathbb{R}^n$, l'azione è via trasformazioni lineari. Il cociclo è ottenuto usando le applicazioni tangenti dei cambiamenti di carta su M.

Siano M, F, $G \subset \mathrm{Aut}(F)$, $\mathfrak{c}$ cociclo a valori in G come sopra. Ripetendo parola per parola la costruzione di $(T(M), \pi_M)$, (sostituendo $\mathbb{R}^n$ con F, $GL(n)$ con G) otteniamo un fibrato

$$\pi : E \to M$$

con *gruppo strutturale* G e *fibra* F. Avremo così:
1) banalizzazioni locali

$$\Psi_j : U_j \times F \to U_j \to \pi^{-1}(U_j)$$

tali che $\pi \circ \Psi_j(x, f) = x$, così che la varietà E (lo "spazio totale" del fibrato) è "localmente un prodotto" con fibra F;
2) un 'atlante fibrato' in cui i cambiamenti di carta mandano fibre in fibre mediante diffeomorfismi del tipo $f \to \mu_{j,i}(x)(f)$.
Due cocicli $\mathfrak{c}$ e $\mathfrak{c}'$ (relativi a due atlanti differenziali che possono essere differenti) sono compatibili se possono essere estesi entrambi all'atlante differenziale unione dei due atlanti dati. Ne segue che anche i rispettivi atlanti fibrati sono tra loro compatibili. Ogni cociclo è quindi contenuto in un unico cociclo compatibile massimale. Quest'ultimo identifica una struttura di fibrato $E \to M$ di *gruppo strutturale* G *e fibra* F.

- Se $G = GL(m)$ e $F = \mathbb{R}^m$ con l'usuale azione via trasformazioni lineari (m non è necessariamente uguale a $\dim M$) diciamo che $\pi : E \to M$ è un *fibrato vettoriale (reale) di rango* m. Se invece di

$GL(m) = GL(m, \mathbb{R})$ usiamo $GL(m, \mathbb{C})$ e $\mathbb{C}^m$ invece di $\mathbb{R}^m$, abbiamo la nozione di fibrato vettoriale complesso (con fibra $\mathbb{C}^m$).

- Se $G = F$ con l'azione data dalla moltiplicazione a sinistra, allora diciamo che $E \to M$ è un *fibrato principale di gruppo strutturale* G. Se un fibrato principale è determinato dal cociclo $\mathfrak{c} = \{\mu_{j,i}\}$, $G \subset \mathrm{Aut}(F)$ come sopra, allora il fibrato con fibra F ottenuto per mezzo dello stesso cociclo $\mathfrak{c}$ si dice *associato* a quel fibrato principale.

• **(Fibrati tensoriali su M)**. Ricordiamo alcuni fatti di *algebra multi-lineare*. Sia V uno spazio vettoriale (su $\mathbb{R}$, ma quanto segue vale su un campo di scalari arbitrario) di dimensione finita n. Indichiamo con $V^* = \mathrm{Hom}(V, \mathbb{R})$ lo *spazio duale*. Abbiamo che $\dim V^* = \dim V$, infatti per ogni base $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ di V è determinata la *base duale* $\mathcal{B}^* = \{v^1, \dots v^n\}$ di V^* definita dalla proprietà che $v^j(v_i) = \delta_i^j$. Quindi ogni base $\mathcal{B}$ di V determina l'isomorfismo (non canonico) $\phi_{\mathcal{B}} : V \to V^*$ tale che $\phi_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}) = \mathcal{B}^*$. D'altra parte, lo spazio *biduale* $(V^*)^* = \mathrm{Hom}(V^*, \mathbb{R})$ è isomorfo a V mediante l'*isomorfismo canonico* $\phi : V \to (V^*)^*$ definito da $\phi(v)(\psi) = \psi(v)$, per ogni $v \in V$, per ogni $\psi \in V^*$. Si verifica direttamente che per ogni base $\mathcal{B}$ di V, $\phi = \phi_{\mathcal{B}^*} \circ \phi_{\mathcal{B}}$. Commetteremo l'abuso di considerare $V = (V^*)^*$ intendendo con questo che sono canonicamente identificati tramite ϕ.

Per ogni $k \in \mathbb{N}$, poniamo (usando varie notazioni equivalenti che si trovano comunemente in letteratura)

$$T_0^0(V) = \mathbb{R}$$

$$T_0^k(V) = V^{\otimes k} := \mathrm{Mult}((V^*)^k, \mathbb{R})$$

dove l'ultimo termine indica lo spazio vettoriale delle applicazioni *multilineari* definite sul prodotto di k copie di V^* a valori in $\mathbb{R}$. Analogamente poniamo

$$T_k^0(V) = (V^*)^{\otimes k} = \mathrm{Mult}(V^k, \mathbb{R})$$

e in generale, per ogni $(k, h) \in \mathbb{N}^2$, poniamo

$$T_h^k(V) = V^{\otimes k} \otimes (V^*)^{\otimes h} = \mathrm{Mult}((V^*)^k \times V^h, \mathbb{R}) \ .$$

In questo modo abbiamo associato ad ogni V una famiglia infinita di spazi vettoriali $\{T_h^k(V)\}$. Un elemento $t \in T_h^k(V)$ è detto un *tensore di tipo* (k, h) su V.

- $T_1^0(V) = V^*$, $T_0^1(V) = (V^*)^* = V$. Quindi i vettori di V e i funzionali lineari su V sono particolari tensori. Un prodotto scalare su V è un tensore $t \in T_2^0(V)$ simmetrico. $T_1^1(V) = \mathrm{Bil}(V^* \times V, \mathbb{R})$ è isomorfo a $\mathrm{End}(V)$ mediante l'isomorfismo *canonico* che associa ad ogni endomorfismo f di V, l'applicazione bilineare ϕ_f tale che $\phi_f(\psi, v) = \psi(f(v))$.

(Le basi $\mathcal{B}_h^k$) Abbiamo visto che ogni base $\mathcal{B}$ di V determina in modo canonico la base duale $\mathcal{B}^* := \mathcal{B}_1^0$ di V^*. Vogliamo mostrare che questo si generalizza per ogni $(k, h) \in \mathbb{N}^2$, nel senso che a partire da $\mathcal{B}$ determiniamo una base privilegiata $\mathcal{B}_h^k$ di $T_h^k(V)$. Cominciamo con $T_2^0(V) = \mathrm{Bil}(V \times V, \mathbb{R})$. E' definita in modo canonico l'applicazione *bilineare*

$$\Phi : V^* \times V^* \to T_2^0(V)$$

tale che per ogni $(\phi, \psi) \in V^* \times V^*$, per ogni $(v, w) \in V \times V$, $\Phi(\phi, \psi)(v, w) = \phi(v)\psi(w)$. Introduciamo la notazione $\Phi(\phi, \psi) = \phi \otimes \psi$. Gli elementi del tipo $\phi \otimes \psi$ sono detti i tensori *decomponibili* di $T_2^0(V)$. Si verifica allora abbastanza facilmente che l'applicazione Φ ha le seguenti proprietà

1. Se $\mathcal{B}^* = \{v^1, \dots, v^n\}$ allora $\mathcal{B}_2^0 = \{v^i \otimes v^j\}_{i,j=1,\dots n}$ (ordinati in modo lessicografico) è una base di $T_2^0(V)$ che quindi ha dimensione uguale a n^2.
2. *(Proprietà universale)* Per ogni applicazione *bilineare* $g : V^* \times V^* \to Z$ a valori in qualche $\mathbb{R}$-spazio Z, esiste un'unica applicazione *lineare* $G : T_2^0(V) \to Z$ tale che $g = G \circ \Phi$. Infatti G è univocamente individuata dalle identità $G(v^i \otimes v^j) = g(v^i, v^j)$.

Lo stesso argomento (usando "$V = (V^*)^*$") si può ripetere per $T_0^2(V) = \mathrm{Bil}(V^* \times V^*, \mathbb{R})$, ottenendo la base $\mathcal{B}_0^2 = \{v_i \otimes v_j\}$. In generale, con lo stesso procedimento, otteniamo la base

$$\mathcal{B}_h^k = \{v_{i_1} \otimes \dots v_{i_k} \otimes v^{j_1} \otimes \dots v^{j_h}\}$$

di $T^k_h(V)$. Ogni $t \in T^k_h(V)$ si può scrivere in modo unico come combinazione lineare

$$t = t^{i_1 \dots i_k}_{j_1 \dots j_h} v_{i_1} \otimes \dots \otimes v^{j_h}$$

dove abbiamo adottato la *convenzione di Einstein* per cui sommiamo su tutte le coppie di indici ripetuti una volta in alto e una in basso; gli scalari con multi-indici t^I_J sono le coordinate di t rispetto alla base $\mathcal{B}^k_h$.

(Cambiamenti di coordinate) Siano $\mathcal{B} = \{v_i\}$ e $\mathcal{D} = \{w_i\}$ due basi di V. Allora il cambiamento di coordinate passando da una base all'altra è determinato dalla matrice $A = (a^h_i) \in GL(n)$ tale che

$$v_i = a^h_i w_h$$

(si noti che h è l'indice di riga, i è l'indice di colonna). Vogliamo determinare, in funzione di A, i cambiamenti di coordinate rispetto alle basi $\mathcal{B}^k_h$ e $\mathcal{D}^k_h$ di $T^k_h(V)$. Per $V^* = T^0_1$ ricaviamo che

$$v^r = b^r_s w^s$$

dove $B = (b^r_s) = (A^t)^{-1}$. In generale l'espressione delle coordinate τ^S_R di un tensore $t \in T^k_h(V)$ rispetto alla base $\mathcal{D}^k_h$ in funzione delle coordinate t^I_J di t rispetto a $\mathcal{B}^k_h$ sono della forma

$$\tau^{s_1 \dots s_k}_{r_1 \dots r_h} = a^{s_1}_{i_1} \dots a^{s_k}_{i_k} b^{j_1}_{r_1} \dots b^{j_h}_{r_h} t^{i_1 \dots i_k}_{j_1 \dots j_h} \ .$$

Le formule di cambiamento di base viste sopra definiscono degli omomorfismo (detti anche "rappresentazioni") $\mathcal{C}^\infty$, iniettivi tra gruppi di Lie

$$\rho^k_h : GL(n) \to GL(T^k_h(\mathbb{R}^n)) \ .$$

In particolare $\rho^0_1(A) = (A^t)^{-1}$ per ogni $A \in GL(n)$.

Per ogni varietà M, partendo dal cociclo $\mathfrak{c} = \{\mu_{j,i}\}$ a valori in $GL(n)$ che definisce $T(M)$, abbiamo i cocicli $\mathfrak{c}^k_h = \{\rho^k_h \circ \mu_{j,i}\}$ a valori in $GL(T^k_h(\mathbb{R}^n))$, usando i quali costruiamo la famiglia di fibrati vettoriali detti *fibrati tensoriali su M*

$$(\pi^k_h)_M : T^k_h(M) \to M$$

con gruppo strutturale $G = GL(T^k_h(\mathbb{R}^n)$, fibra $F = T^k_h(\mathbb{R}^n)$. Per ogni $x \in M$, $(\pi^k_h)^{-1}_M(x) = T^k_h(T_xM)$. Risulta che Il fibrato tangente $T(M) = T^1_0(M)$. $T^0_1(M) := T^*(M)$ è detto il *fibrato cotangente* di M.

(Il fibrato delle basi.) Usando il solito cociclo che definisce $T(M)$, possiamo considerare il corrispondente fibrato principale

$$\beta_M : B(M) \to M$$

di gruppo strutturale $G = GL(n)$. Interpretando le colonne di una matrice di $GL(n)$ come una base di $\mathbb{R}^n$, per ogni $x \in M$, la fibra $\beta^{-1}_M(x)$ può essere interpretata come l'insieme delle basi dello spazio tangente T_xM.

Osservazione. Poiché le rappresentazioni ρ^k_h sono iniettive, determinano una inclusione di $GL(n)$ come sottogruppo di di $GL(T^k_h(\mathbb{R}^n)$. Quindi formalmente i fibrati tensoriali sono tutti fibrati associati al fibrato principale delle basi.

• **(Il fibrato determinante)** Considerato ancora il cociclo che definisce $T(M)$, segue dalle proprietà del determinante che $\{\det \mu_{j,i}\}$ è un cociclo a valori nel gruppo moltiplicativo $G = GL(1)$. Possiamo allora costruire il fibrato vettoriale di rango 1 detto il *fibrato determinante di M*

$$\det T(M) \to M \ .$$

Prendendo il *segno* del determinante, otteniamo un cociclo a valori nel gruppo moltiplicativo finito $G = \{\pm 1\}$. Il fibrato principale associato

$$r : \tilde{M} \to M$$

è tale che $\tilde{M}$ è una varietà della stessa dimensione di M, r è localmente un diffeomorfismo e per ogni $x \in M$, la fibra $r^{-1}(x)$ è fatta di due punti.

• **(Fibrati isomorfi)** Siano $\pi : E \to M$ e $\pi' : E' \to M'$ fibrati con lo stesso gruppo strutturale G e stessa fibra F. Essi si dicono isomorfi se esistono diffeomorfismi $\tilde{\phi} : E \to E'$, $\phi : M \to M'$, tali che

$\pi' \circ \tilde{\phi} = f \circ \pi$, quindi per ogni $x \in M$, $\tilde{\phi}$ manda la fibra $F_x = \pi^{-1}(x)$ nella fibra $F'_{\phi(x)} = (\pi')^{-1}(\phi(x))$; inoltre richiediamo che le rappresentazioni locali di $\tilde{\phi}$ siano della forma $U \times F \to U' \times F$, $(x, f) \to (\phi(x), g(x)f)$, dove $g : U \to G$ è liscia.

- Se $f : M \to M'$ è un diffeomorfismo, allora (Df, f) è un isomorfismo tra $T(M)$ e $T(M')$.

Se $M = M'$ si considera anche una versione più ristretta della nozione di isomorfismo tra fibrati, imponendo che $\phi = \text{id}$. Questa relazione si può riformulare in termini di cocicli: due fibrati su M costruiti a partire da due cocicli $\mathfrak{c}$ e $\mathfrak{c}'$ su uno stesso atlante di M a valori in G, sono isomorfi (in questo senso ristretto) se e solo se esiste una famiglia di applicazioni lisce $\{\lambda_j : U_j \to G\}$, tale che per ogni $(i, j) \in J^2$, per ogni $x \in U_i \cap U_j$, $\mu'_{j,i}(x) = \lambda_j^{-1}(x)\mu_{j,i}(x)\lambda_i(x)$.

• **(Sezioni).** Un oggetto importante associato ad un qualsiasi fibrato $\pi : E \to M$ è l'insieme delle sue *sezioni*: una sezione è per definizione un'applicazione $\mathcal{C}^\infty$ $s : M \to E$ tale che per ogni $x \in M$, $\pi(s(x)) = x$. In altre parole s seleziona un elemento $s(x)$ nella fibra $\pi^{-1}(x) := E_x \sim F$ che varia in modo regolare al variare del punto x. Nel caso dei fibrati tensoriali, una tale sezione è anche chiamata un *campo di tensori* su M (di un dato tipo (k, h)). In particolare le sezioni del fibrato tangente sono dette *campi di vettori*, quelle del fibrato cotangente sono dette 1-*forme differenziali* su M. Una sezione g di $T^0_2(M)$ tale che per ogni $x \in M$, $g(x)$ è simmetrico e definito positivo è detta una *metrica riemanniana* su M. Se invece $g(x)$ è non degenere e ha ovunque segnatura $i_+ = n - 1, i_- = 1$, dove n è la dimensione di M, g è detta una *metrica lorenziana* su M. L'esistenza di sezioni di un dato fibrato che verifichino certe condizioni può comportare restrizioni sulla varietà M. Per esempio (negli esempi supponiamo che M sia connessa):

- Il fibrato delle basi $B(M)$ ammette una sezione se e solo se $T(M)$ è isomorfo (in senso stretto) al fibrato prodotto $M \times \mathbb{R}^n$. Se $s(x) = (v_1(x), \dots, v_n(x))$ è una base di T_xM, allora un isomorfismo $\phi : M \times \mathbb{R}^n \to T(M)$ si costruisce ponendo

$$\phi(x, v = \sum a_j e_j) := \sum_j a_j v_j(x)$$

dove come al solito, $(e_1, \dots, e_n)$ è la base canonica di $\mathbb{R}^n$.

- Il problema sull' esistenza o meno di una sezione di $B(M)$ può essere distribuito induttivamente sui seguenti n problemi parziali; la risposta positiva a ciascuno di questi sottoproblemi è condizione necessaria per l'esistenza di una sezione di $B(M)$.

(1) Esiste un campo di vettori mai nullo, sia X_1, su M?
(2) Se esiste tale X_1, esiste allora un altro campo di vettori mai nullo X_2 tale che per ogni $x \in M$, $X_1(x)$ e $X_2(x)$ sono linearmente indipendenti in T_xM ?
(3) Se esistono tali X_1 e X_2, esiste allora un terzo campo mai nullo X_3 tale che per ogni $x \in M$, $X_1(x), X_2(x), X_3(x)$ sono linearmente indipendenti in T_xM.
(4) E così via induttivamente fino alla questione sull'esistenza di un campo X_n tale che per ogni x, $X_1(x), \dots, X_n(x)$ siano linearmente indipendenti in T_xM.

- Il fibrato determinante di M ammette una sezione mai nulla se e solo se M è orientabile.

- Il fibrato "segno del determinante" $r : \tilde{M} \to M$ ammette una sezione se e solo se M è orientabile; in tal caso $\tilde{M}$ è formato da due componenti connesse orientate in modo opposto, ciascuna diffeomorfa a M per mezzo della restrizione di r. Se M non è orientabile, allora $\tilde{M}$ è connessa. Per esempio la proiezione canonica $S^2 \to \mathbf{P}^2$ si può riottenere per questa via.

- Ogni varietà compatta M ammette metriche riemanniane. Infatti realizzando M come sottovarietà di $\mathbb{R}^m$, con m abbastanza grande, possiamo per esempio restringere su ogni $T_xM \subset \mathbb{R}^m$ la *metrica riemanniana standard* g_0 sulla varietà $\mathbb{R}^m$, cioè il campo costante di prodotti scalare uguale in ogni punto al prodotto scalare definito positivo standard sullo spazio vettoriale $\mathbb{R}^m$.

- Se M è munita di una metrica riemanniana g, globalizzando il teorema di rappresentazione noto dall'algebra lineare, è determinato un isomorfismo di fibrati $F_g : T(M) \to T^*(M)$. Generalizzando in modo diretto, per ogni coppia di coppie di indici (k, h), (r, s), tali che $k + h = r + s$, è determinato un isomorfismo di fibrati $F_g : T^k_h(M) \to T^r_s(M)$, in particolare tra $T^k_h(M)$ e $T^0_{k+h}(M)$. L'espressione in coordinate locali fibrate di questi isomorfismi F_g si traduce nel gioco di "alzare/abbassare gli indici" (rispetto alla metrica g). Per fare questo è sufficiente che g sia un campo di prodotti scalare *non degeneri*, per esempio che g sia una metrica lorentziana (ammesso che esista).