March 5, 2017

G216-17: PRIME NOZIONI SULLE VARIETÀ

Conveniamo che in questa scheda ogni $\mathbb{R}^n$ è munito della topologia euclidea, a meno che non si specifichi diversamente. $B^n_r(x)$ denota la palla aperta di $\mathbb{R}^n$ di centro x e raggio $r > 0$; se $x = 0$ scriveremo semplicemente B^n_r.

• Per ogni intero $n \geq 0$, uno spazio topologico X è *n-localmente euclideo* se per ogni $x \in X$ esiste (U, ϕ) dove U è un intorno aperto di x in X, $\phi : U \to W$ è un omeomorfismo, essendo $W \subset \mathbb{R}^n$ un aperto.

• Uno spazio topologico X è una *n-varietà topologica* (TOP) se è n-localmente euclideo ed inoltre è T_2 e 2-numerabile. Per definizione n è detta la *dimensione* della varietà.

• Ogni coppia (U, ϕ) come sopra è detta una *carta locale* della n-varietà TOP X; $(W, \psi = \phi^{-1})$ è detta una *parametrizzazione locale* di X. L'insieme $\mathcal{A} = \mathcal{A}_X$ di tutte le carte locali è detto *atlante massimale* di X e individua la sua struttura di n-varietà topologica. *Un* atlante di X è una famiglia di carte locali $\{(U_j, \phi_j)\}_{j\in J}$ che ricoprono X, cioè $\{U_j\}_{j\in J}$ è un ricoprimenmto aperto di X.

Osservazioni e primi esempi:

- Ogni spazio n-localmente euclideo ha le stesse proprietà topologiche locali di $\mathbb{R}^n$, in particolare è 1-numerabile, localmente compatto.

- Le proprietà richieste dalla definizione di n-varietà TOP sono tra loro indipendenti; in particolare:

Per ogni $n \geq 1$, esistono spazi n-localmente euclidei che non sono T_2, oppure che non sono 2-numerabili: consideriamo lo spazio topologico prodotto $(\mathbb{R}^n, \tau_E) \times (\mathbb{R}, \tau_D)$; verificare per esercizio che è n-localmente euclideo, T_2 ma non è 2-numerabile. Consideriamo lo spazio topologico quoziente $X/\sim$ dello spazio prodotto $X = (\mathbb{R}, \tau_E) \times (\{0, 1\}, \tau_D)$, dove $(x, j) \sim (y, i)$ se e solo se $(x, j) = (y, i)$ oppure $x, y > 0$ e $x = y$; verificare per esercizio che $X/\sim$ è 1-localmente euclideo, 2-numerabile ma non è T_2. Con lo stesso metodo si possono costruire esempi di dimensione arbitraria.

- Una 0-varietà X è un insieme finito o numerabile munito della topologia discreta; è compatta se e solo se è finita.

- Per specificare una struttura di varietà topologica su uno spazio X, che per la nostra definizione è necessariamente T_2 e 2-numerabile, è sufficiente esibire un atlante; l'atlante massimale è implicitamente definito e viene usato per esempio ogni volta che restringiamo una carta locale (U, ϕ) a un sottoinsieme aperto non vuoto $U' \subset U$.

- Un aperto U di $\mathbb{R}^n$ è una n-varietà topologica. Possiamo prendere l'atlante formato da una sola carta $\{(U, \phi)\}$, dove $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ è l'inclusione.

- Se $f : U \to \mathbb{R}^m$ è una funzione continua definita su un aperto U di $\mathbb{R}^n$, allora il grafico di f $G(f) \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ è una n-varietà topologica. Possiamo considerare l'atlante costituito dall'unica carta $\phi : G(f) \to U$, $\phi(x, f(x)) = x$; la parametrizzazione inversa associata è $\psi : U \to G(f)$, $\psi(x) = (x, f(x))$.

- Mostriamo ora che *la sfera unitaria $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n;\ ||x|| = 1\}$ di $\mathbb{R}^n$ è una $(n-1)$–varietà*. Se $n = 1$, $S^0 = \{\pm 1\}$ consiste di due punti e la cosa è evidente. Supponiamo $n > 1$. Sia $x \in S^{n-1}$, $||x|| := \sqrt{(x, x)} = 1$. Poniamo

$$x^\perp = \{y \in \mathbb{R}^n\ ;\ (x, y) = 0\}$$

cioè "l'iperpiano" di $\mathbb{R}^n$ passante per O_n formato dai vettori che sono ortogonali ad x. Fissiamo $x_+ = (0, \dots, 0, 1)$ cioè il *polo nord* di S^{n-1}. Allora $x_+^\perp$ coincide con la "copia" di $\mathbb{R}^{n-1}$ contenuta in $\mathbb{R}^n$, definita dall'equazione $x_n = 0$. Consideriamo l'aperto di $\mathbb{R}^n$, $U_+ = \mathbb{R}^n \setminus \{x_+\}$. La *proiezione stereografica su $x_+^\perp$ di centro x_+*

$$\pi_+ : U_+ \to x_+^\perp$$

è definita geometricamente ponendo $\pi_+(x) = r(x, x_+) \cap x_+^\perp$. Analiticamente si calcola che

$$\pi_+(x) = \frac{1}{1-x_n}(x_1, \dots, x_{n-1})$$

(che è manifestamente continua, anzi C^∞ - vedi sotto per questa nozione) . La restrizione ϕ_+ a $S^{n-1} \cap U_+ = S^{n-1} \setminus \{x_+\}$ ha come immagine tutto $x_+^\perp = \mathbb{R}^{n-1}$ ed è invertibile con la parametrizzazione inversa data geometricamente ponendo per ogni $y \in \mathbb{R}^{n-1}$, $\psi_+(y) = r(y, x_+) \cap S^{n-1}$. Si nota infatti che la retta $r(y, x_+)$ incontra la sfera in due punti uno dei quali è proprio x_+, per cui $\psi_+(y)$ è l'unico altro punto di intersezione appartenente a $S^{n-1} \cap U_+$. Analiticamente calcoliamo

$$\psi_+(y) = \left(\frac{2y}{1 + ||y||^2}, \frac{||y||^2 - 1}{||y||^2 + 1} \right)$$

(che ancora una volta è manifestamente continua, anzi C^∞). Abbiamo quindi verificato che $(S^{n-1} \cap U_+, \phi_+)$ definisce una carta locale in un intorno di ogni punto della sfera diverso da x_+. Ripetendo la stessa costruzione usando invece il *polo sud* della sfera, $x_- = (0, \dots, 0, -1)$, troviamo una carta locale $(S^{n-1} \cap U_-, \phi_-)$ che funziona anche per il polo nord. Dunque S^{n-1} è una $(n-1)$–varietà. Si osserva che i due "poli" non hanno in effetti niente di speciale ed è possibile definire una carta sulla base della proiezione stereografica di centro un arbitrario punto della sfera. Può essere utile dare una descrizione qualitativa per esempio della carta $(S^{n-1} \cap U_+, \phi_+)$ e della parametrizzazione locale associata $(\mathbb{R}^{n-1}, \psi_+)$. Considerazioni del tutto analoghe varranno usando invece un altro qualsiasi punto della sfera. L'origine O_{n-1} di $\mathbb{R}^{n-1}$ corrisponde al polo sud: $\phi_+(x_-) = O_{n-1}$. Se consideriamo le palle chiuse $\overline{B}_r^{n-1}(O_{n-1})$ e facciamo tendere $r \to +\infty$, queste palle concentriche diventano sempre più grandi e invadono tutto $\mathbb{R}^{n-1}$; d'altra parte se consideriamo gli aperti di $\mathbb{R}^{n-1}$ complementari a queste palle

$$U_r = \mathbb{R}^{n-1} \setminus \overline{B}_r^{n-1}(O_{n-1}) \,,$$

la restrizione di ψ_+ su U_r è un diffeomorfismo tra U_r e W_r dove quest'ultimo è della forma

$$W_r = (S^{n-1} \cap B_R^n(x_+)) \setminus \{x_+\}$$

e l'espressione esplicita del raggio $R = R(r)$ in funzione di r è lasciata al lettore. Risulta che R varia nell'intervallo aperto $(0, 2)$ e $R \to 0$ quando $r \to +\infty$. Possiamo quindi dire che x_+ è *il punto di* S^{n-1} *all'infinito di* $\mathbb{R}^{n-1}$, tanto che a volte si scrive $S^{n-1} = \mathbb{R}^{n-1} \cup \{\infty\}$. Bisogna però maneggiare questa espressione suggestiva con cautela perché può indurre a fraintendimenti. Apparentemente il modo di "andare all'infinito" su $\mathbb{R}^{n-1}$ è stato misurato per mezzo della distanza euclidea d_{n-1} su $\mathbb{R}^n$. Però questa struttura *geometrica* non ha alcun significato intrinseco rispetto all'omeomorfismo (in effetti, diffeomorfismo - vedi sotto) che stiamo analizzando: in nessun senso ragionevole essa è preservata dall'omeomorfismo. D'altra parte c'è un modo puramente topologico di pensare "l'andare all'infinito": si possono considerare famiglie di sottoinsiemi "compatti" di $\mathbb{R}^{n-1}$ sempre più grandi (nel senso dell'inclusione di sottoinsiemi) che invadono tutto lo spazio e studiare come si comporta la successione degli spazi complementari (come abbiamo fatto usando le palle chiuse, quindi compatte $\overline{B}_r^{n-1}(O_{n-1})$).

Un modo alternativo per convincersi che S^{n-1} è una varietà è quello di esprimerla come unione di grafici di funzioni continue ($\mathcal{C}^\infty$) definite su aperti di $\mathbb{R}^{n-1}$. A meno di rotazioni l'esempio tipico è il grafico della funzione $f : B_1^{n-1} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \sqrt{1 - \sum_{i=1}^{n-1} x_i^2} \;\; .$$

- Lo *spazio proiettivo* $\mathbf{P}^n$ è per definizione lo spazio topologico quoziente di $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ mediante la *relazione di equivalenza proiettiva* per cui $x \sim y$ se e solo se x e y generano lo stesso sottospazio vettoriale 1-dimensionale di $\mathbb{R}^{n+1}$. In modo equivalente si può ottenere $\mathbf{P}^n$ come spazio quoziente di S^n mediante la restrizione della precedente relazione, per cui $x \sim y$ se e solo se $y = \pm x$ (verificare questa affermazione per esercizio). Lasciando per esercizio anche la verifica che $\mathbf{P}^n$ è

T_2 e 2-numerabile, mostriamo che è una n-varietà topologica. Possiamo prendere l'atlante formato dalle $n+1$ carte $\{U_j,\phi_j)\}_{j=1,\dots,n+1}$, dove $U_j = \{[x]; x \in \mathbb{R}^{n+1},\ x_j \neq 0\}$, $\phi_j : U_j \to \mathbb{R}^n$, $\phi_j([x]) = (1/x_j)(x_1,\dots,x_{j-1},x_{j+1},\dots,x_{n+1})$. In quanto spazio T_2 quoziente della sfera S^n che è compatta, anche $\mathbf{P}^n$ è una n-varietà compatta. Per lo stesso motivo, se $n \geq 1$ $\mathbf{P}^n$ è connesso per archi. La proiezione sul quoziente $\pi : S^n \to \mathbf{P}^n$ che è continua per definizione della topologia quoziente, in effetti è un *omeorfismo locale*; più precisamente per ogni $x \in S^n$ esistono una carta locale (U,ϕ) di S^n intorno a x e una carta locale (W,ψ) di $\mathbf{P}^n$ intorno a $y = \pi(x)$ tali che $W = \pi(U)$ e $\pi| : U \to W$ è un omeomorfismo (la verifica di questa affermazione è lasciata per esercizio).

- Se M è una m-varietà topologica e M' una n-varieta' topologica, allora il prodotto $M \times M'$ è una $(n+m)$-varietà topologica. Infatti le proprietà T_2 e 2-numerabile si sollevano al prodotto, e il "prodotto" degli atlanti massimali $\mathcal{A}_M \times \mathcal{A}_N = \{(U \times U', \phi \times \phi')\}$ è un atlante di $M \times M'$.

- Se $f : Y \to X$ è un omeomorfismo e X è una n-varietà TOP, allora anche Y lo è; infatti le proprietà T_2 e 2-numerabile sono preservate dagli omeomeorfismi, inoltre se $\mathcal{A}_X = \{(U,\phi)\}$ è l'atlante massimale di X, allora $f^{-1}(\mathcal{A}_X) = \{(f^{-1}(U), \phi \circ f)\}$ (la restrizione di f è sottintesa) lo è per Y. In altre parole "Essere una n-varietà topologica" è una proprietà invariante per omeomorfismi.

- Una n-varietà topologica X è *connessa se e solo se è connessa per archi.* Come nel caso degli aperti di $\mathbb{R}^n$, basta dimostrare che ogni componente connessa per archi di X è un aperto. Essere aperto è una proprietà locale, quindi si conclude usando il fatto che X è localmente euclidea.

• I "morfismi" tra varietà topologiche sono le applicazioni continue; gli "isomorfismi" sono gli omeomorfismi. Quindi le varietà topologiche individuano un settore dello studio degli spazi topologici, ottenuto specializzando gli spazi ma non i morfismi.

Le funzioni continue, possono avere comportamenti strani e piuttosto lontani dall' intuizione geometrica. Ricordiamo ad esempio la cosiddetta "curva di Peano" che consiste in un' applicazione continua e *surgettiva* definita sull'intervallo $[0,1]$ a valori nel quadrato $[0,1]^2$. Inoltre lavorando con le funzioni continue e con gli omeomorfismi, può succedere che fatti intuitivamente plausibili (ad esempio la cosiddetta *invarianza topologica della dimensione*: "Se $\mathbb{R}^n$ è omeomorfo a $\mathbb{R}^m$, allora $n = m$") siano veri ma di difficile dimostrazione. Le cose si semplificano se restringiamo la classe di funzioni con cui operare. Ad esempio, l'invarianza della dimensione è ben nota se ci limitiamo agli isorfismi lineari, così come non esistono curve di Peano "lineari a pezzi". Queste considerazioni motivano la specializzazione della nozione di varietà definendo la classe delle *varietà differenziabili* (DIFF). Le nozioni che richiamiamo qui sotto, relative alle applicazioni differenziabili sono sicuramente già state studiate in qualche corso di Analisi.

• Indichiamo con $M(k,n)$ lo spazio delle matrici reali $k \times n$ che può essere naturalmente identificato con $\mathbb{R}^{kn}$ e coincide con lo spazio delle applicazioni lineari $\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^k)$. Ricordiamo che $f : U \to \mathbb{R}^k$ definita sull'aperto $U \subset \mathbb{R}^n$ è differenziabile se esiste l'*applicazione differenziale*

$$df : U \to \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^k),\ x \to d_x f$$

tale che per ogni $x \in U$,

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x) - d_x f(h)}{||h||} = 0\ .$$

La composizione di applicazioni differenziabili è differenziabile. Precisamente, se $f(U) = W$ è un aperto di $\mathbb{R}^k$, $g : W \to \mathbb{R}^m$ e $f,\ g$ sono entrambe differenziabili, allora per ogni $x \in U$,

$$d_x(g \circ f) = d_{f(x)} g \circ d_x f;\ d_x \mathrm{id} = I\ .$$

• Un' applicazione $f : U \to \mathbb{R}^k$ come sopra è C^0 se è continua; è C^r se è differenziabile e *df* è C^{r-1}; è C^∞ (si dice anche che è *liscia*) se è C^r per ogni $r \geq 0$.

• Se $W = f(U)$ è un aperto di $\mathbb{R}^k$, $f : U \to W$ come sopra è un *diffeomorfismo* se è liscia, invertibile e con inversa $g := f^{-1}$ liscia a sua volta.

Si ha l' "Invarianza differenziale della dimensione", cioè se $f : U \to W$ come sopra è un diffeomorfismo, allora $k = n$: per ogni $x \in U$, $y = f(x)$, $d_y g \circ d_x f = I_n$, $d_x f \circ d_y g = I_k$, quindi i differenziali sono funzioni lineari, l'una inversa dell'altra per cui $n = k$.

$f : U \to \mathbb{R}^k$ *è liscia se e solo se esistono e sono continue tutte le derivate parziali*

$$\frac{\partial^r f_j}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_r}}$$

per $j = 1, \dots, k$, *per ogni ordine* $r \geq 0$. *In particolare, per ogni* $x \in U$,

$$d_x f = (\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x))_{j=1,\dots,k;\ i=1,\dots,n}$$

detta anche la matrice Jacobiana *di* f *in* x.

• Data una n-varietà TOP X, un *atlante differenziabile* (DIFF) $\{(U_j, \phi_j)\}_{j\in J}$ è un atlante tale che per ogni $(i,j) \in J^2$, $\phi_j \circ (\phi_i)^{-1}$, definito su $\phi_i(U_i \cap U_j)$ e a valori in $\phi_j(U_i \cap U_j)$, è un diffeomorfismo tra aperti di $\mathbb{R}^n$. Una struttura di *n-varietà* DIFF su X è individuata da un atlante DIFF *massimale* (cioè non propriamente contenuto in alcun atlante DIFF).

Osservazioni e primi esempi:

- Come nel caso TOP, per specificare una struttura di varietà DIFF su X è sufficiente esibire un atlante DIFF; l'atlante massimale DIFF che estende l'atlante dato è implicitamente definito e viene usato per esempio ogni volta che restringiamo una carta locale (U, ϕ) ad un aperto $U' \subset U$.

- Gli aperti di $\mathbb{R}^n$, le sfere S^n, gli spazi priettivi $\mathbf{P}^n$ con gli atlanti descritti in precedenza sono in effetti esempi di varietà DIFF. Il grafico di una applicazione DIFF $f : U \to \mathbb{R}^k$ è una varietà DIFF.

- Il prodotto di due varietà DIFF è una varietà DIFF.

• Data un'applicazione continua tra varietà DIFF $f : M \to N$, di dimensione m e n rispettivamente, una *rappresentazione locale* di f è della forma

$$\psi \circ f \circ \phi^{-1} : \phi(U) \to \psi(W)$$

dove (U, ϕ) appartiene all' atlante DIFF massimale di M, (W, ψ) all'atlante DIFF massimale di N e $f(U) \subset W$. L'applicazione f è *liscia* se per ogni $x \in M$ esiste una rappresentazione locale tale che $x \in U$ e $\psi \circ f \circ \phi^{-1}$ è un' applicazione liscia tra aperti di $\mathbb{R}^m$ e $\mathbb{R}^n$. f è un *diffeomorfismo* se è liscia, invertibile e con inversa continua e liscia. In tal caso necessariamente $m = n$.

Se f *è liscia, allora* ogni *rappresentazione locale di* f *è liscia*: lasciamo la verifica per esercizio.

Siano M_0 *una n-varietà* DIFF, M_1 *una n-varietà* TOP *e* $f : M_1 \to M_0$ *un* omeomorfismo. *Se* $\mathcal{A}_0$ *è l'atlante* DIFF *massimale di* M_0, *allora* $\mathcal{A}_1 = f^{-1}(\mathcal{A}_0)$ *è l'atlante massimale di una struttura* DIFF *su* M_1 *per cui* f *è "tautologicamente" un* diffeomorfismo. *In particolare se* $M_1 = M_0 = M$, *in generale* $\mathcal{A}_0$ *e* $\mathcal{A}_1$ *sono strutture* DIFF differenti *su* M *(in altre parole* $id : (M, \mathcal{A}_1) \to (M, \mathcal{A}_0)$ non *è un diffeomorfismo), che però sono tra loro "isomorfe" cioè diffeomorfe, mediante il diffeomorfismo* f: la verifica di queste affermazioni è lasciata per esercizio.