April 19, 2017

G216-17: FUNZIONI A "FORUNCOLO" E QUALCHE APPLICAZIONE

Si consideri la funzione $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $\alpha(x) = 0$ se $x \leq 0$, $\alpha(x) = e^{-\frac{1}{x}}$ se $x > 0$. È un semplice esercizio verificare che α è $\mathcal{C}^\infty$ e che per ogni $r \in \mathbb{N}$, la derivata r-esima $\frac{d^r\alpha}{dx^r}(0) = 0$; si dice allora che α è *piatta* in 0, nonostante α non sia costante in un intorno di 0. L'esistenza di punti piatti di questo tipo è una proprietà importante delle funzioni $\mathcal{C}^\infty$.
Fissiamo due punti $a, b \in \mathbb{R}$ tali che $0 < a < b$. Definiamo $\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\beta(x) = \alpha(x-a)\alpha(b-x)$. Chiaramente β è $\mathcal{C}^\infty$, vale 0 per su $\{x \leq a\} \cup \{x \geq b\}$, è positiva altrove con un unico punto di massimo in (a, b), a e b sono punti piatti per β.
Definiamo ora $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\gamma(x) = \frac{\int_{|x|}^{b} \beta(t)dt}{\int_{a}^{b} \beta(t)dt} \ .$$

Si verifica allora che γ è $\mathcal{C}^\infty$, $\gamma(x) = 1$ se $|x| \leq a$, $\gamma(x) = 0$ se $|x| \geq b$, $0 \leq \gamma(x) \leq 1$ ed è monotona se $a \leq |x| \leq b$; $\pm a$ e $\pm b$ sono punti piatti per γ. Tale $\gamma := \gamma_{a,b}$ è detta (una) *funzione a foruncolo* (di parametri a, b).
Possiamo estendere la definizione ponendo

$$\gamma_n : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \ \gamma_n(x) = \gamma(||x||)$$

e spesso ometteremo l'indice "n".

Globalizzazione 1. Un uso tipico delle funzioni a foruncolo è quello di globalizzare funzioni a priori definite solo localmente. Sia M una n-varietà liscia, $x \in M$ e sia $f : U \to \mathbb{R}$ una funzione liscia definita su un intorno (aperto) di x in M che verifica certe proprietà che per qualche motivo ci interessano. Ci chiediamo se esista una funzione liscia $\tilde{f} : M \to \mathbb{R}$ definita globalmente su tutta la varietà e che coincida localmente con f, cioè esista un intorno aperto $x \in U' \subset U$ tale che $f(y) = \tilde{f}(y)$ per ogni $y \in U'$. A meno di restringere U (e f) possiamo assumere che esista una carta (U, ϕ) dell'atlante massimale di M tale che $\phi(x) = 0$ e la palla chiusa $\overline{B}^n(0, 2) \subset \mathbb{R}^n$ sia contenuta in $W = \phi(U)$. Consideriamo la funzione a foruncolo $\gamma : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ di parametri $1, 2$. Poniamo $\tilde{f}(p) = \gamma(\phi(p))f(p)$ se $p \in U$, $\tilde{f}(p) = 0$ se $p \in M \setminus U$. E' facile verificare che $\tilde{f}$ ha le proprietà richieste; come intorno U' di x possiamo prendere $U' = \phi^{-1}(B^n(0, 1))$. Applicando la costruzione alla funzione costante $f = 1$, la funzione $\tilde{f}$ è per definizione una *funzione a foruncolo globale* definita su tutta M *con supporto compatto contenuto in* U (per definizione il *supporto* di una funzione è la chiusura del luogo dove non si annulla).

Atlanti "simpatici" su una varietà compatta. Ogni $x \in M$ ammette una carta locale (U, ϕ) come sopra, a cui è associata una funzione a foruncolo globale, sia γ_U, con supporto compatto $K_U = \phi^{-1}(\overline{B}^n(0, 1))$. Se M è *compatta* esiste una famiglia finita di tali carte locali $\{(U_j, \phi_j)\}_{j=1,\dots k}$, tale che le parti interne B_j dei supporti K_j delle rispettive funzioni a foruncolo globali γ_j ricoprono tutta M. Se ci conviene possiamo specializzare ulteriormente la situazione richiedendo per esempio (sempre a meno di restringere gli U_j) che per ogni j, $W_j = \phi_j(U_j) = B^n(0, 3)$. Diciamo che un tale atlante finito è *"simpatico"*. Vedremo qualche interessante applicazione degli atlanti simpatici. Più in generale per ogni M (non necessariamente compatta) e per ogni sottoinsieme compatto K di M, esiste un intorno aperto A di K in M munito di un atlante simpatico come sopra tale che K sia ricoperto dai B_j.

Embedding in $\mathbb{R}^m$. Mostriamo che ogni n-varietà *compatta* M ammette un embedding in qualche $\mathbb{R}^m$, quindi a meno di diffeomorfismi ogni varietà compatta può essere realizzata come sottovarietà di qualche spazio euclideo $\mathbb{R}^m$. Infatti, fissiamo un atlante simpatico $\{(U_j, \phi_j)\}_{j=1,\dots k}$, con associato sistema di funzioni a foruncolo globali e supporti compatti $\{\gamma_j, K_j\}$. Definiamo

$$g : M \to (\mathbb{R}^{n+1})^k = \mathbb{R}^m, \ m = k(n+1)$$

ponendo
$$g(p) = (g_1(p), \dots g_k(p)) := ((\gamma_1(p)\phi_1(p), \gamma_1(p)), \dots, (\gamma_k(p)\phi_k(p), \gamma_k(p))) \ .$$
È chiaro che g è $\mathcal{C}^\infty$. Affermiamo che g è un embedding. Poiché M è compatta, basta dimostrare che è una immersione iniettiva. Per dimostrare che è una immersione, occorre verificare che per ogni $p \in M$, d_pg è di rango massimo cioè uguale a n. Esiste j tale che $p \in B_j$; sull' aperto B_j, $g_j = (\phi_j, 1)$, quindi d_pg_j è di rango massimo perchè ϕ_j è una carta; a maggior ragione anche d_pg lo è. Per l'iniettività: siano $p \neq q \in M$. Se esiste j tale che $p, q \in K_j$, allora $g_j(p) \neq g_j(q)$. Se esiste j tale che $p \in K_j$ ma q non appartiene a K_j, allora $1 = \gamma_j(p) \neq \gamma_j(q) = 0$. In ogni caso $g(p) \neq g(q)$.

Globalizzazione 2. Nella stessa situazione precedente, normalizziamo le funzioni γ_j ponendo per ogni $p \in M$,
$$\lambda_j(p) := \frac{\gamma_j(p)}{\sum_{l=1}^k \gamma_j(p)} \ .$$
Il denominatore non è mai nullo perché tutti gli addendi sono ≥ 0 e per ogni p esiste j tale che $\gamma_j(p) = 1$. Chiaramente ogni λ_j è $\mathcal{C}^\infty$ e ha lo stesso supporto compatto $K_j \subset U_j$ di γ_j. Inoltre, per ogni p,
$$\sum_j \lambda_j(p) = 1 \ .$$
Il sistema delle $\{\lambda_j\}$ è detto una *partizione dell'unità subordinata al ricoprimento (finito)* $\{U_j\}$ *di* M.

• Sia M una n-sottovarietà compatta di $\mathbb{R}^m$, $m > n$. Sia $f : M \to \mathbb{R}^h$ una applicazione. Vogliamo dimostrare che i seguenti fatti sono tra loro equivalenti:

(1) f è $\mathcal{C}^\infty$.
(2) Per ogni $x \in M$, f si estende localmente ad una applicazione $\mathcal{C}^\infty$ $f_U : U \to \mathbb{R}^h$ definita su un intorno aperto U di x in $\mathbb{R}^m$.
(3) f si estende ad una applicazione liscia $\hat{f} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^h$ definita su tutto $\mathbb{R}^m$ a supporto compatto.

Chiaramente $3 \Rightarrow 2 \Rightarrow 1$. Mostriamo $1 \Rightarrow 2$. Per definizione di sottovarietà, per ogni $p \in M$, esiste una carta locale di $\mathbb{R}^m$ intorno a p, (U, ϕ) tale che $\phi(U) = B^m(0,3) \subset \mathbb{R}^m$, $\phi(p) = 0$, $\phi(U \cap M) = B^n(0,3) \subset B^m(0,3)$. Qui consideriamo $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n}$ e indichiamo con $\pi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ la proiezione naturale. Posto $\psi = \phi^{-1}$, consideriamo su $B^n(0,3)$ la funzione $f \circ \psi$; allora $(f \circ \psi) \circ \pi$ ne è una estensione su $B^m(0,3)$. Infine $\hat{f}_U := ((f \circ \psi) \circ \pi) \circ \phi$ è una estensione di $f|(U \cap M)$ su tutto U.

Mostriamo infine $2 \Rightarrow 3$. Usando la compattezza di M possiamo trovare un insieme finito di carte $\{(U_j, \phi_j)\}_{j=1,\dots k}$ dell'atlante massimale di $\mathbb{R}^m$ che si comportano come descritto nel punto precedente rispetto ad un insieme $p_1, \dots, p_k$ di punti di M e tali che la restrizione $\{(U_j \cap M, \phi_j|)\}_{j=1,\dots k}$ è un atlante di M. Poniamo $A := \cup_{j=1}^k U_j$ che chiaramente è un intorno aperto di M in $\mathbb{R}^m$. Esiste una partizione dell'unità $\{\lambda_j\}$ su A subordinata al ricoprimento $\{U_j\}_{j=1,\dots k}$ che si restringe ad una partizione dell'unità su M subordinata al ricoprimento $\{U_j \cap M\}_{j=1,\dots k}$. Per ogni j, sia $\hat{f}_j$ l'estensione locale di f su U_j. Allora, ponendo per ogni $x \in A$, $\hat{f}(x) = \sum_j \lambda_j(x)\hat{f}_j(x)$ è ben definita una applicazione $\mathcal{C}^\infty$ su $\mathbb{R}^m$ con supporto compatto contenuto in A e che estende f.

• Vogliamo mostrare che ogni varietà compatta M ammette una *metrica riemanniana* g. Ci sono almeno due modi di farlo, sempre utilizzando le funzioni a foruncolo e loro derivati.

(a) Sappiamo che M può essere realizzata come sottovarietà di qualche $\mathbb{R}^m$. Per ogni $p \in M$, T_pM è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^m = T_p(\mathbb{R}^m)$. Certamente $\mathbb{R}^m$ ammette una metrica riemanniana, per esempio quella standard g_0 per cui per ogni $x \in \mathbb{R}^m$, per ogni coppia (v, w) di vettori tangenti a $\mathbb{R}^m$ in x, si ha $g_{0,x}(v, w) = v^t w$. Allora ponendo per ogni $p \in M$, g_p uguale alla restrizione di $g_{0,p}$ su T_pM, abbiamo definito una metrica riemanniana g su M.

(b) Vogliamo usare differentemente un atlante simpatico di M, per costruire una metrica g, senza passare per un embedding in qualche $\mathbb{R}^m$. Per ogni carta (U_j, ϕ_j) di un tale atlante, fissiamo una metrica riemanniana h_j su $W_j = \phi_j(U_j) \subset \mathbb{R}^n$ (per esempio la restrizione su W_j della metrica standard g_0 su $\mathbb{R}^n$). Usando ϕ_j questa può essere rimontata ad una metrica g_j definita localmente su U_j. Consideriamo una partizione dell'unità $\{\lambda_j\}$ subordinata ad $\{U_j\}$. Allora ponendo

$$g = \sum_j \lambda_j g_j$$

è ben definita una metrica riemanniana globale su tutta la varietà M.

Varietà a bordo. Abbiamo svolto tutte le considerazioni assumendo che M fosse senza bordo. Con qualche piccolo adattamento quanto detto e fatto vale anche nel caso in cui la n-varietà compatta M abbia bordo non vuoto $N = \partial M$ che è a sua volta una $(n-1)$-varietà compatta senza bordo. Si tratta di adattare la nozione di atlante simpatico come segue. Le carte (U_j, ϕ_j) di un tale atlante sono di due tipi: $U_j \subset (M \setminus N)$ e in tal caso sono come nel caso senza bordo; oppure $U_j \cap N \neq \emptyset$; in tal caso $W_j = \phi_j(U_j) = B^n(0,3) \cap \{x_n \geq 0\} \subset \mathbb{R}^n$ e $\phi_j(U_j \cap N) = \mathbb{R}^{n-1} \cap W_j = \partial W_j$. Le nozioni di funzione a foruncolo globale γ_j con supporto $K_j \subset U_j$ e di partizione dell'unità $\{\lambda_j\}$ subordinata al ricoprimento si estendono senza problemi. Vediamo qui sotto una applicazione.

• Sia M una varietà compatta con bordo non vuoto $N = \partial M$. Vogliamo mostrare che esiste una funzione liscia $f : M \to \mathbb{R}$ tale che $f(x) \geq 0$ per ogni $x \in M$, $f^{-1}(0) = N$, per ogni $x \in N$, $d_x f$ ha rango massimo (per continuità questo implica che esiste un intorno aperto di N in M che non contiene punti critici di f). Consideriamo un ricoprimento simpatico di M. Su ogni aperto U_j definiamo localmente una funzione f_j nel modo seguente: se $U_j \subset M \setminus N$, f_j vale costantemente 1; altrimenti, sia $p : \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la proiezione naturale sul secondo fattore; allora se $U_j \cap N$ non è vuoto, poniamo $f_j = p \circ \phi_j$. Infine si verifica che la funzione

$$f = \sum_j \lambda_j f_j$$

è ben definita e ha le proprietà volute.
Affinando un pochino lo stesso metodo, possiamo dimostrare la seguente generalizzazione. Una *triade* (M, N_0, N_1) è per definizione formata da una varietà compatta M con bordo ∂M (che può anche essere vuoto) formato dall'unione disgiunta di N_0 e N_1, a loro volta composti dall'unione di componenti connesse del bordo (anche N_j, $j = 0, 1$, può essere vuoto, essi sono chiamati rispettivamente *bordo iniziale e finale* della triade). Allora esiste una funzione $\mathcal{C}^\infty$ $f : M \to [0,1]$ tale che $N_j = f^{-1}(j)$, $j = 0, 1$, e che non ha punti critici in un intorno di ∂M.

• *Collari e cilindri.* Siano M, $N = \partial M \neq \emptyset$, $f : M \to \mathbb{R}$ come nel punto precedente. Vogliamo mostrare che esiste un *collare* di N in M, cioè un diffeomorfismo $c : N \times [0,1) \to M$, tale che per ogni $x \in N$, per ogni $t \in [0,1)$, $c(x,0) = x$, $f(c(x,t)) = t$. Infatti, fissiamo una metrica riemanniana g su M. Il *gradiente di f rispetto a g* è l'unico campo di vettori $\nabla_g f$ su M tale che per ogni $x \in M$, ogni $v \in T_x M$, $d_x f(v) = g_x(v, \nabla_g f(x))$. Nelle nostre ipotesi, il campo gradiente non è mai nullo su un intorno aperto A di N in M. Sia X il campo su A ottenuto normalizzando il gradiente in modo tale che per ogni x, $g_x(X(x), X(x)) = 1$. Consideriamo l'equazione differenziale ordinaria definita da X su A. Per ogni $x \in N$, sia $\sigma_x : [0,1) \to M$ la curva integrale tale che $\sigma(0) = x$. Si verifica che l'applicazione $c(x,t) := \sigma_x(t)$ ha le proprietà volute. Un corollario interessante è il seguente *Lemma del cilindro*: Data una triade (M, N_0, N_1) sia $f : M \to [0,1]$ come sopra. Supponiamo inoltre che f non abbia punti critici ovunque su M. Allora esiste un diffeomorfismo $c : N_0 \times [0,1] \to M$ tale che $f(c(x,t)) = t$. Ne segue in particolare che N_0 e N_1 sono diffeomorfi; diciamo allora che (M, N_0, N_1) è una *triade prodotto* (a meno di diffeomorfismi). In un modo un poco laborioso che omettiamo è possibile dimostrare che un collare di N in M è *unico a meno di isotopie*: cioè dati due collari c_0 e c_1 essi sono commessi da una famiglia differenziale di collari c_s, $s \in [0,1]$.

• *Funzioni di Morse, atlanti simpatici e gradienti adattati, decomposizioni in triadi elementari.* Sia (M, N_0, N_1) una triade e $f : M \to [0,1]$ come sopra. Si dice che f è *di Morse* se ha un numero finito di punti crici non degeneri $p_1, \dots, p_s$, di rispettivi indici $i_1, \dots, i_s$, e con valori $a_r = f(p_r)$ due a due disgiunti e in modo che $a_r < a_{r+1}$. Possiamo raffinare la nozione di atlante simpatico adattandola ad una funzione di Morse data f. Richiediamo cioè che ogni punto critico p_r sia contenuto in un unico $B_r \subset K_r \subset U_r \subset M \setminus N$, dove (U_r, ϕ_r) è una carta dell'atlante, che questi B_r siano due a due disgiunti, e che per ogni r (via il lemma di Morse), si abbia che (B_r, ϕ_r) è una *carta di Morse intorno a* p_r, cioè $\phi_r(p_r) = 0$ e $f_r := f \circ \psi : \phi_r(B_r) \to \mathbb{R}$ sia tale che

$$f_r(u) = -(\sum_{l=1}^{i_r} y_l^2) + \sum_{l=i_r+1}^{n} y_l^2 \ .$$

Implementando il modo (b) visto sopra, possiamo costruire una metrica riemanniana g su M tale che per ogni r, l'espressione di g nelle coordinate locali date dalla carta (B_r, ϕ_r) coincida con la restrizione della metrica standard g_0 su $\mathbb{R}^n$. Quindi l'espressione in queste coordinate locali del campo gradiente $\nabla_g f$ è quella standard:

$$\nabla_g f_r(u) = 2(-u_1, \dots, -u_{i_r}, u_{i_r+1}, \dots, u_n)^t \ .$$

Diciamo allora che è un campo gradiente *adattato alla funzione di Morse* f.

Per ogni sottointervallo J di $[0,1]$, poniamo $M_J := f^{-1}(J)$ la controimmagine di J in M. Per ogni r, possiamo fissare $\epsilon_r > 0$ (abbastanza piccolo) tale che le $M_{[a_r-\epsilon_r, a_r+\epsilon_r]}$ sono due a due disgiunte e B_r interseca il bordo di $M_{[a_r-\epsilon_r, a_r+\epsilon_r]}$. La triade (M, N_0, N_1) risulta allora decomposta nelle *triadi elementari* concatenate (i rispettivi bordi iniziali e finali sono sottintesi):

$$M_{[0,a_1-\epsilon_1]} \cup M_{[a_1-\epsilon_1, a_1+\epsilon_1]} \cup M_{[a_1+\epsilon_1, a_2-\epsilon_2]} \cup M_{[a_2-\epsilon_1, a_2+\epsilon_2]} \cup M_{[a_2+\epsilon_2, a_3-\epsilon_3]} \cup \dots \cup M_{[a_s+\epsilon_s, 1]} \ .$$

Le triadi elementari sono di due tipi: o non contengono punti critici e quindi per il lemma del cilindro sono triadi prodotto, oppure contengono un solo punto critico. Lo studio di queste decomposizioni, per ogni funzione di Morse data f e al variare di f, è uno strumento potente per analizzare la struttura delle varietà compatte. In particolare è importante capire cosa e come cambia passando da $M_{[0,a_r-\epsilon_r]}$ a $M_{[0,a_r+\epsilon_r]}$ (cioè attraversando un valore critico a_r di dato indice i_r); questo include il possibile cambiamento dei rispettivi bordi finali.