27 Novembre 2014

1. Teoremi dell'Hôpital

In questo paragrafo enunceremo dei risultati che in certi casi permettono di trattare le forme di indeterminazione $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$. Cominciamo con l'indeterminazione $\frac{0}{0}$.
Prendiamo in considerazione due situazioni:

- Sono date due funzioni f e g definite su un intorno $(a-\sigma, a+\sigma)$ di un punto $a \in \mathbb{R}$; $f(a) = 0 = g(a)$, f e g sono derivabili in a, $g'(a) \neq 0$.
- f e g sono definite su $[a, a+\sigma)$, sono continue, $f(a) = 0 = g(a)$, f e g sono derivabili su $(a, a+\sigma)$ e per ogni $x \in (a, a+\sigma)$, $g'(x) \neq 0$.

Nel primo caso siamo interessati a

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

nel secondo a

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} \ .$$

Allora vale il seguente

Teorema 1.1. (Regole dell'Hôpital per $\frac{0}{0}$)
Prima regola. *Nella prima situazione*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)} \ .$$

Seconda regola. *Nella seconda situazione, se*

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \in \overline{\mathbb{R}}$$

allora

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = l \in \overline{\mathbb{R}}$$

C'è una versione simmetrica della seconda regola, dove f è definita su $(a-\epsilon, a]$ e $x \to a^+$ è sostituito con $x \to a^-$.

Posponiamo la dimostrazione. Per il momento ci limitiamo a dire che il risultato nella prima situazione è facile e segue quasi direttamente dalla definizione di derivata xmentre il secondo è più complicato e si basa su una applicazione astuta del teorema di Cauchy.
La seconda regola ha la seguente importante applicazione.

Corollario 1.1. *Supponiamo che f sia definita su $I = (a-\epsilon, a+\epsilon)$, sia continua, sia derivabile in $I \setminus \{a\}$ e che $\lim_{x\to a} f'(x) = l \in \mathbb{R}$. Allora f è derivabile in a e $f'(a) = l$.*

Dim. Si applica due volte la seconda regola a $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$. □

Passiamo ora l'indeterminazione $\frac{\infty}{\infty}$. Prendiamo in considerazione la seguente situazione:

f e g sono definite su $(a, a+\epsilon)$, sono derivabili, per ogni $x \in (a, a+\epsilon)$, $g'(x) \neq 0$ ed inoltre

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty, \quad \lim_{x\to a^+} g(x) = \pm\infty \ .$$

Siamo interessati al limite $\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)}$. Allora vale

Teorema 1.2. (Regole dell'Hôpital per $\frac{\infty}{\infty}$) *Nella situazione precedente, se*

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \in \overline{\mathbb{R}}$$

allora

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = l \in \overline{\mathbb{R}} \ .$$

Esiste una versione della regola quando dove f è definita su $(a-\epsilon, a)$ e $x \to a^+$ è sostituito con $x \to a^-$.

Anche in questo caso omettiamo la dimostrazione. Ci sono naturali varianti di queste regole. Per esempio abbiamo:

Proposizione 1.2. *Siano f, g funzioni definite su $I = (b, +\infty)$, derivabili e tali che per ogni $x \in I$, $g'(x) \neq 0$. Supponiamo inoltre che $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ e $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$. Se $\lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \in \overline{\mathbb{R}}$ allora $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = l$.*

Dim. Ci possiamo ricondurre alla seconda regola per $\frac{0}{0}$ per mezzo del cambiamento di variabile $y = 1/x$. $\square$

Benché siano state omesse le dimostrazioni,è importante che lo studente assimili bene gli enunciati, per poterli applicare correttamente. In alcune situazioni si può applicare ripetutamente le regole, nel caso in cui le funzioni siano derivabili più volte e i rapporti tra le derivate continuino a presentare una forma di indeterminazione. In certi casi questo processo porta a semplificazioni che permettono alla fine di calcolare il limite in questione. In altri casi il processo può progressivamente complicare la situazione e quindi essere del tutto inutile. Con gli opportuni accorgimenti si possono applicare le regole ad altre forme di indeterminazione ($+\infty - \infty,\ 0 \cdot \infty,\ 1^\infty, \infty^0 \dots$).

2. Dimostrazioni, esempi e alcune considerazioni.

Iniziamo con le prove delle due regole come enunciate nel Teorema 1.1.
Prima regola. Come detto, in questo caso la prova è semplice e deriva direttamente dalla definizione di derivata.
Osserviamo che l'ipotesi $g'(a) \neq 0$ implica che in un opportuno intorno di a si ha $g(x) \neq g(a)$ (la funzione g in a è crescente o decrescente). Quindi abbiamo

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\frac{g(x)-g(a)}{x-a}}$$

Passando al limite abbiamo la tesi.
Seconda regola. Supponiamo l finito. Vogliamo provare che le ipotesi implicano che se ε è un arbitrario reale positivo, allora esiste δ tale che se $x \in (a, a+\delta)$ allora $\left|\frac{f(x)}{g(x)} - l\right| < \varepsilon$.
Ma

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - l\right| = \left|\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} - l\right|$$

dove ξ è un punto interno all'intervallo (a, x) perché, dal teorema di Cauchy, per ogni x in $(a, a+\sigma)$ si ha che $\frac{f(x)}{g(x)} =^{1} \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$ dove ξ è un punto interno all'intervallo (a, x).
Quindi, essendo l il limite del rapporto delle derivate, si ha che per tale ε esiste un δ tale che per $x \in (a, a+\delta)$ $\left|\frac{f'(x)}{g'(x)} - l\right| < \varepsilon$. Pertanto, poiché $a < \xi < x < a + \sigma$ si ha che anche $\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = l$

[1] si ricordi che$f(a) = g(a) = 0$

Altri casi. Come già detto nel precedente paragrafo, la prova degli altri casi o si riconduce direttamente o si ottiene in maniera sostanzialmente analoga alla dimostrazione fatta.
Ad esempio consideriamo il caso in cui, sempre sotto le stesse ipotesi, per $x \to a^+$ la forma indeterminata sia del tipo $\dfrac{\infty}{\infty}$ e si abbia che $\lim\limits_{x\to a^+} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = l$ con l finito.
Fissiamo ad arbitrio un $\varepsilon > 0$ e sia $\delta_1 < \sigma$ un numero > 0 tale che per $a < x < a + \delta_1$ si abbia $\left|\dfrac{f'(x)}{g'(x)} - l\right| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ e $g'(x) \neq 0$.
Sempre per il teorema di Cauchy, per un qualsiasi $x \in (a, a+\delta_1)$ esiste un $\xi \in (x, a+\delta_1)$ tale che $\dfrac{f(x) - f(a+\delta_1)}{g(x) - g(a+\delta_1)} = \dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$. Essendo $a < \xi < a + \delta_1$ si avrà

$$l - \frac{\varepsilon}{2} < \frac{f(x) - f(a+\delta_1)}{g(x) - g(a+\delta_1)} < l + \frac{\varepsilon}{2}$$

da cui

$$\frac{f(x) - f(a+\delta_1)}{g(x) - g(a+\delta_1)} = \frac{f(x)}{g(x)} \cdot \frac{1 - \frac{f(a+\delta_1)}{f(x)}}{1 - \frac{g(a+\delta_1)}{g(x)}} = \frac{f(x)}{g(x)}\psi(x)$$

ove la funzione ψ tende a 1 per $x \to a^+$.
Pertanto in un intorno destro di a dove la ψ è positiva si avrà

$$\frac{l - \frac{\varepsilon}{2}}{\psi(x)} < \frac{f(x)}{g(x)} < \frac{l + \frac{\varepsilon}{2}}{\psi(x)}.$$

È quindi possibile trovare un $\delta < \delta_1$ tale che per $x \in (a, a+\delta)$ si abbia

$$\psi(x) > 0, \qquad \frac{l + \frac{\varepsilon}{2}}{\psi(x)} < l + \varepsilon \quad \text{e} \quad \frac{l - \frac{\varepsilon}{2}}{\psi(x)} > l - \varepsilon.$$

Con tale scelta avremo che $l - \varepsilon < \dfrac{f(x)}{g(x)} < l + \varepsilon$ e quindi possiamo concludere che $\lim\limits_{x\to a^+} \dfrac{f(x)}{g(x)} = l$.
Lasciamo al lettore il caso che la forma indeterminata sia per $x \to \infty$.
Osservazioni. Val la pena di considerare i seguenti esempi.

- Applicare direttamente la regola dell'Hopital alle funzioni $f(x) = e^{-x}$ e $g(x) = \dfrac{1}{x}$ per calcolare il $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f}{g} = \dfrac{e^{-x}}{\frac{1}{x}}$ non migliora la situazione ma la peggiora. La cosa cambia se si pone il limite nella forma equivalente $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x}{e^x}$
- La regola dell'Hospital nella sua seconda forma deduce l'esistenza del limite del rapporto di due funzioni dall'esistenza del limite del rapporto delle derivate. L'implicazione inversa non sussiste. Per convincersene basta considerare ad esempio come funzione f la funzione definita in questo modo

  $$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(\dfrac{1}{x}) & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

  e come funzione g la la funzione x.