29 Ottobre 2015

Qualche limite e serie standard svolti.

Indice

Queste note contengono lo studio di qualche limite e di qualche serie trattato nel corso con qualche suggerimento per richiamare le idee delle prove.

1 Successioni

1.1 Richiami.

Iniziamo con il riportare, in alcuni casi in modo molto schenatico, dimostrazioni dette durante il corso delle lezioni o lasciate per esercizio nel corso di altre dispense.

Per prima cosa accenniamo a come provare le operazioni sui limiti enunciate nella dispensa SUCCESSIONI; daremo un **cenno** di prova solo in alcuni casi particolari (in particolare supporremo sempre che i limiti siano in $\mathbb{R}$) lasciando per esercizio il resto. Per gli enunciati e le notazioni ci riferiamo alla pagina 4 di tale dispensa. Iniziamo riprendendo alcune prove nella dispensa citata.

1. **Limite di una somma di successioni.** Fissato ε esitono n_1 e n_2 (maggiori di n_0) tali che per ogni $n > n_1$ e per ogni $n > n_2$ si ha rispettivamente

$|a_n - L| \leq \frac{\varepsilon}{3}$ e $|b_n - L'| \leq \frac{\varepsilon}{3}$. Pertanto per $n > \sup\{n_1, n_2\}$ si ha

$$|a_n + b_n - (L + L')| \leq |a_n - L| + |b_n - L'| \leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon$$

2. **Limite di un prodotto di successioni.** Si osservi che

$$a_n b_n - LL' = a_n(b_n - L') + L'(a_n - L)$$

da cui segue

$$|a_n b_n - LL'| \leq |a_n||b_n - L'| + |L'||a_n - L|$$

Poiché abbiamo supposto che i limiti siano in $\mathbb{R}$, gli elementi di ognuna delle due successioni sono un insieme limitato, quindi esiste un H tale che $|a_n| < H$ per ogni $n > n_0$. Pertanto, detto A il più grande dei due numeri He L', abbiamo $|a_n b_n - LL'| \leq A(|a_n - L| + |b_n - L'|)$. A questo punto ragionando in modo analogo al punto (1) fissato ε si ha $|a_n b_n - LL'| \leq 2A\varepsilon$ che basta per avere la tesi.

3. **Limite della successione degli inversi.** Procedendo in modo analogo a quanto fatto fino ad ora abbiamo

$$\left|\frac{1}{a_n} - \frac{1}{L}\right| = \frac{|a_n - L|}{|a_n||L|}$$

Supponiamo $L \neq 0$: si potrà pertanto determinare un $h > 0$ tale che si abbia $|a_n| > h$ per ogni $n > n_1$ con $n_1 > n_0$ (ad esempio si può prendere $h = \frac{|L|}{2}$). Inoltre fissato ε esiste un $n_2 > n_0$ per cui per ogni $n > n_2$ si ha $|a_n - L| < \varepsilon$. Quindi per $n > \sup\{n_1, n_2\}$ si avrà $\left|\frac{1}{a_n} - \frac{1}{L}\right| < \frac{\varepsilon}{h|L|}$ che basta per avere la tesi. Per il caso in cui $L = 0$ si rimanda alla pagina 4 della dispensa SUCCESSIONI.

A questo punto lo studente dovrebbe essere in grado di enunciare, e provare come conseguenza di (3), il teorema per limite del rapporto di due successioni.

Vogliamo concludere questa sezione con due altre "*operazioni*" sui limiti dando solo un cenno della prova, rimandando i casi generali al momento in cui sarà trattata la continuità delle funzioni.

1. **Limite del logaritmo di una successione.** Sia $\{a_n\}$ una successione di numeri positivi tendente ad un limite $L \neq 0$, allora la successione $\{\log a_n\}$ tende a $\log L$.

2. **Limite dell'esponenziale di una successione.** Sia $\{a_n\}$ una successione convergente al limite L e sia a un numero reale positivo. Allora $\lim a^{a_n} = a^{\lim a_n} = a^L$.

3. **Limite della successionedegli esponenziali.** Se la successione $\{a_n\}$ è a termini positivi si ha $\lim a_n^a = (\lim a_n)^a = L^a$.

Naturalmente vi è un enunciato del tutto analogo per la successione dei logaritmi nel caso in cui la base sia un qualsiasi numero reale $a \neq 1$.

Per la prova si osservi innanzitutto che se $\{x_n\}$ è una successione di numeri positivi tendente a 0 ed a un numero reale positivo, la successione $\{a^{x_n}\}$ tende a 1. (Nel caso che la successione sia di termini negativi si ricordi che $a^{-a_n} = \frac{1}{a^{a_n}}$.).

Si noti che è vero anche il viceversa. Supponiamo infatti $a > 1$: allora $\forall \eta > 0$ risulta $a^\eta > 1$ e $a^{-\eta} < 1$. Dal fatto che $\{a^{x_n}\}$ tende a 1 si ha che fissato ε, risulta definitivamente $|a^{x_n} - 1| < \varepsilon$ cioè $1 - \varepsilon < a^{x_n} < 1 + \varepsilon$. Quindi con opportune scelte di η si può dire $a^{-\eta} < a^{x_n} < a^\eta$ che, per le proprietà di monotonia delle potenze, implica che definitivamente $-\eta < x_n < \eta$ e dunque effettivamente $\lim x_n = 0$.

Poniamo ora $x_n = \log_a L - \log_a a_n$ e osserviamo che $\lim a^{x_n} = \lim a^{\log_a L - \log_a a_n} = \lim \frac{a^{\log_a L}}{a^{\log_a a_n}} = \lim \frac{L}{a_n} = 1$.

Nel caso che il limite L sia uguale a 0 lo studente può mostrare che la successione tende a $-\infty$.

Si lascia al lettore l'estensione a $\overline{\mathbb{R}}$ ove possibile.

1.2 Confronti di crescita di esponenziali.

Abbiamo visto come conseguenza della diseguaglianza di Bernoulli che la successione a^n per $a > 1$ diverge, mentre converge a 0 se $|a| < 1$ e non ha limite se $a < -1$. Confrontiamola, quando diverge, con qualche altra successione, anche essa divergente.

- $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^n}{n^k} = \infty$ con $a > 1$ e $k > 0$.

  L'idea per comprendere il comportamento di questa successione è di confrontarla con una successione di coefficienti binomiali. Il coefficiente binomiale $\dbinom{n}{k+1} = \dfrac{n(n-1)\cdots(n-k)}{(k+1)!}$ è un polinomio in n di grado $k+1$, pertanto

  $$\lim_{n\to\infty} \frac{\binom{n}{k+1}}{n^k} = \infty$$

  Quindi per n abbastanza grande, diciamo $n \geq k+1$

  $$a^n = (1 + (a-1))^n = \sum_{h=0}^{\infty} \binom{n}{h} (a-1)^h > \binom{n}{k+1} (a-1)^{k+1}$$

  Quindi si ha $\dfrac{a^n}{n^k} > \dfrac{\binom{n}{k+1}}{n^k}(a-1)^{k+1}$ e pertanto, se $a > 1$ e $k > 0$ $\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n^k} = \infty$.

- $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^n}{n!} = 0$, con $a > 1$

Il termine generico a_n della successione è, per $n > [a]$ [1]

$$\frac{a \cdot a \cdot a \ldots \cdot a}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot [a] \cdot [a]+1 \cdot \ldots n} = \frac{a}{1} \cdot \frac{a}{2} \cdot \ldots \cdot \frac{a}{[a]} \frac{a}{[a]+1} \cdots \frac{a}{n} = C(a) \cdot B(a)$$

ove si è indicato con $C(a)$ il termine $\frac{a}{1} \cdot \frac{a}{2} \cdot \ldots \cdot \frac{a}{[a]}$ e con $B(a) = \frac{a}{[a]+1} \cdots \frac{a}{n}$.
Il termine $C(a)$ è una costante dipendente solo da a [2] e $B(a)$ è il prodotto di $n - [a]$ fattori tutti minori di 1.

In particolare risulta $a_n < C(a)\frac{a}{n}$. Il risultato si ottiene osservando che $\frac{a}{n} \to 0$.

Altri confronti interessanti sono

- $\lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{n!} = 0$

  perché se $n \geq k+1$ si ha $n! \geq n(n-1)\cdots(n-k)$ e quindi $\frac{n^k}{n!} \leq \frac{n^k}{n(n-1)\cdots(n-k)} \to 0$ perché il numeratore è un polinomio im n di grado k e il denominatore è un polinomio di grado $k+1$.

- $\lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{n!} = \infty$

  perché $\frac{n}{n}\frac{n}{n-1}\cdots\frac{n}{1} > n$

Osservazione 1.1. Abbiamo considerato esempi di successioni $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ divergenti e analizzato il comportamento della successione $\frac{a_n}{b_n}$: se tale successione diverge, questo significa che per ogni $M > 0$, definitivamente si ha che $a_n > Mb_n$; se invece esiste finito il limite L della successione $\frac{a_n}{b_n}$, allora per ogni $\varepsilon > 0$ si ha che definitivamente $(L-\varepsilon)b_n < |a_n| < (L+\varepsilon)b_n$.

Possiamo interpretare questi comportamenti dicendo che nel primo caso la successione $\{a_n\}$ va ad infinito *"piu‘ velocemente di b_n"* mentre nel secondo le due successioni vanno all'infinito sostanzialmente con la stessa velocità. Il lettore piu' interessato puo' approfondire queste considerazioni nel paragrafo 1.5.

Possiamo riassumere quanto visto dicendo che *definitivamente* si ha, se $a > 1$ e k intero positivo fissato,

$$n^k < a^n < n! < n^n.$$

[1] Si ricordi che se a è un numero reale, si è indicata con $[a]$ la parte intera di a, cioè l'intero n tale che $n \leq a < n+1$. (Cfr dispensa REALI)

[2] Facendo i calcoli risulta $C(a) = \frac{a^{[a]}}{[a]!}$

1.3 Qualche criterio

- *La successione* $\frac{a_1 + \ldots + a_n}{n}$ *ha lo stesso comportamento della successione* a_n*; in particolare se* $a_n \to l$ *allora anche* $\frac{a_1 + \ldots + a_n}{n} \to l$*. Come conseguenza si ha che* $\frac{\log n!}{n}$ *diverge.*

  Diamo un cenno della dimostrazione solo per il caso $l = 0$ lasciando al lettore la cura di trattare gli altri casi e di evidenziare i dettagli anche per il caso che diamo.

  Indichiamo con $b_n = \frac{a_1 + \ldots + a_n}{n}$: vogliamo mostrare che $b_n \to 0$. Sappiamo che $a_n \to 0$ e quindi che fissato un ε esiste un n_0 tale che per $n > n_0$ $|a_n| < \varepsilon$. Il termine b_k della successione è somma di due termini $b_k = \frac{a_1 + \ldots + a_{n_0} + a_{n_0+1} + \ldots a_k}{k} = \frac{a_1 + \ldots + a_{n_0}}{k} + \frac{a_{n_0+1} + \ldots a_k}{k} = b_k^1 + b_k^2$ Ora il termine b_k^2 viene maggiorato da $\varepsilon \frac{k - n_0}{k}$, quantità quest'ultima che tende a 1; facendo crescere opportunamente k si ottiene che, essendo n_0 fissato, anche il termine b_k^1 diventa definitivamente piccolo, diciamo minore di ε. Quindi in definitiva il termine b_k diviene definitivamente piccolo.[3]

- *Sia* a_n *una successione tale che* $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$*. Se* $l < 1$ *allora* $a_n \to 0$*, se* $l > 1$ *allora* $a_n \to \infty$*.*

  Se $l < 1$ si può scegliere un ε in modo che $l + \varepsilon < 1$. Indichiamo con $M = l + \varepsilon$. Per definizione di limite si ha che per $n > \nu$, $|\frac{a_{n+1}}{a_n}| < M$, quindi si ha che definitivamente $a_{n+1} < Ma_n$ e cioè che per $n > \nu$ $|a_{n+\nu}| < M^\nu a_\nu$. La tesi si ottiene dal fatto che essendo $M < 1$ $M^j \to 0$ e per confronto $a_{m+\nu} \to 0$.

- *Sia* a_n *una successione. Se* $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$ *allora anche* $\lim_{n\to\infty}(a_n)^{\frac{1}{n}} = l$*.*

  Ripercorrere la prova precedente osservando che definitivamente (cioè per $n > \nu$) $|\frac{a_{n+1}}{a_n} - l| < \varepsilon$ da cui si ha che definitivamente vale

  $$(l - \varepsilon)a_n < a_{n+1} < (l + \varepsilon)a_n.$$

  Quindi ricorsivamente otteniamo

  $$(l - \varepsilon)^m a_\nu < a_{m+\nu} < (l + \varepsilon)^m a_\nu.$$

  Prendendo le radici $(m + \nu)$-esime si ha

  $$(l - \varepsilon)^{\frac{m}{m+\nu}} a_\nu^{\frac{1}{m+\nu}} \leq (a_{m+\nu})^{\frac{m}{m+\nu}} \leq (l + \varepsilon)^{\frac{m}{m+\nu}} a_\nu^{\frac{1}{m+\nu}}.$$

---

[3] Se $l \neq 0$ basta osservare che la successione $a'_n = a_n - l$ tende a 0 e che $b'_n = \frac{a'_1 + \ldots + a'_n}{n} = \frac{a_1 - l + \ldots + a_n - l}{n} = \frac{a_1 + \ldots + a_n}{n} - l$

Da questo si conclude osservando che $a_\nu^{\frac{1}{m+\nu}} \to 1$, $(l-\varepsilon)^{\frac{m}{m+\nu}} \to l-\varepsilon \ldots$ e che quindi definitivamente si ha

$$l - 2\varepsilon < a_j^{\frac{1}{j}} < l + 2\varepsilon$$

per cui converge a l.

1.4 Altri confronti.

Sappiamo che $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ e che $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ Calcolare

- $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!}$
- $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$
- $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_0 a_1 \cdots a_{n-1}} = \lim_{n\to\infty} a_n$

1.5 Un argomento per i più interessati.

Riprendiamo le considerazioni fatte nell'osservazione 1.1 a proposito del onfronto di infiniti ed infinitesimi. Per tentare di rendere più preciso il discorso, potremmo pensare di confrontare una successione $\{a_n\}$ divergente a $+\infty$ con una successione il cui comportamento sia di riferimento, come ad esempio la successione $\{n^k\}$, e dire che la successione $\{a_n\}$ è un *infinito di ordine maggiore (*risp *minore* o *uguale)*a k a seconda che $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n^k}$ sia uguale rispettivamente a $+\infty$ o 0 o sia un limite finito non nullo l.

Le stesse considerazioni possono esser fatte per una successione $\{a_n\}$ convergente a 0: in tal caso si dirà che la successione è *infinitesima di ordine maggiore (*risp *minore* o *uguale)*a k a seconda che $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n^k}$ sia uguale rispettivamente a 0 o ∞ o sia un limite finito non nullo l.

Vi sono alcune cose a cui fare attenzione in questo linguaggio, in particolare sul significato della frase *la successione* $\{a_n\}$ *va ad infinito più velocemente di* $\{b_n\}$.

Innanzitutto il fatto che a_n sia definitivamente più grande di b_n non implica il viceversa, cioè che la successione $\frac{a_n}{b_n}$ sia divergente: basti pensare alle successioni $a_n = n+1$ e $b_n = n$.

Un'altra cosa è che l'aver usato dei numeri naturali o reali per indicare gli ordini di infinito o infinitesimo non implica che queste quantità si comportino come i numeri naturali o reali. Si consideri ad sempio la successione $a_n = \log n$. È chiaro che

$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n^0} = \infty$ e quindi questa successione è infinita di ordine strettamente maggiore di 0; risulta inoltre che $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n^\alpha} = 0$ non appena α sia positivo.[4]

Quindi l'ordine di infinito di questa successione risulta essere minore di ogni α reale positivo (in particolare di $\frac{1}{k}$ per ogni $k \in \mathbb{N}$) pur non essendo 0, cosa che nei reali non può accadere per via della proprietà di Archimede.

1.6 Varie.

Determinare il comportamento delle successioni seguenti

- $\lim_{n\to\infty} \frac{\log(n+1)}{\log(n-1)}$

  Sol. $\lim_{n\to\infty} \frac{\log(n+1)}{\log(n-1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\log[(n-1)(1+\frac{2}{n-1})]}{\log(n-1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\log(n-1)+\log(1+\frac{2}{n-1})}{\log(n-1)} =$
  $1+\lim_{n\to\infty} \frac{\log(1+\frac{2}{n-1})}{\log(n-1)} = 1+\lim_{n\to\infty} \frac{(n-1)\log(1+\frac{2}{n-1})}{(n-1)\log(n-1)} = 1+\lim_{n\to\infty} \frac{\log(1+\frac{2}{n-1})^{n-1}}{(n-1)\log(n-1)} =$
  $1+\lim_{n\to\infty} \frac{\log e^2}{(n-1)\log(n-1)} = 1$

- Sulla base dell'esempio precedente calcolare $\lim_{n\to\infty} \frac{\log(an+b)}{\log(cn+d)}$ o più in generale $\lim_{n\to\infty} \frac{\log(P(n))}{\log(Q(n))}$ ove P e Q sono due polinomi di gradi rispettivamente p e q.

- $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

  Sol. $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n+1}-\sqrt{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} =$
  0

- Se $0 < a < b$ allora $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n+b^n} = b$ perché $b^n < a^n + b^n < 2b^n$, quindi $b \le \sqrt[n]{a^n+b^n} \le \sqrt[n]{2}b$ e per confronto il risultato.

---

[4] Un modo per vederlo nel caso $\alpha = 1$ è questo.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log n}{n} = \lim_{n\to\infty} \log \sqrt[n]{n} = \log \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = \log 1 = 0.$$

In generale si ha, ponendo $n^\alpha = t$, cioè $n = \sqrt[\alpha]{t}$,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log n}{n^\alpha} = \lim_{t\to\infty} \frac{\log t^{\frac{1}{\alpha}}}{t} = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{\alpha}\frac{\log t}{t} = 0.$$

1.7 Variazioni sulla successione $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$.

Sappiamo che la successione $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ è convergente a un limite che è un numero reale compreso tra 2 e 3, numero che convenzionalmente si indica con e.

Qui di segito mostriamo qualche manipolazione che permette di ricondurre il calcolo di alcuni limiti a quello della successione iniziale. [5]

- Un limite che si calcola direttamente a partire dal limite di questa successione è

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = 1 \qquad (*)$$

  Infatti

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1$$

- Si vede immediatamente che se k è un intero fissato

$$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n+k}\right)^n = e \qquad (**)$$

  Infatti

$$\left(1+\frac{1}{n+k}\right)^n = \frac{\left(1+\frac{1}{n+k}\right)^{n+k}}{\left(1+\frac{1}{n+k}\right)^k}$$

  La successione a numeratore converge ad e (perché?) e quella a denominatore, essendo k un intero fissato, converge ad 1.

  Con un ragionamento del tutto analogo si prova anche che se k è un intero fissato si ha

$$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+k} = e.$$

- $$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{a}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{\frac{n}{a}}\right)^{\frac{n}{a}\cdot a} = e^a.$$

  Quindi, in modo del tutto analogo a $(*)$ si ha

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{a}{n}\right)}{\frac{b}{n}} = \frac{a}{b}$$

[5] Attenzione: alcuni dettagli non sono esplicitati completamente; si invita pertanto lo studente a esplicitarli.

- A questo punto dovrebbe esser chiara la ragione e l'effetto delle manipolazioni nei due esempi seguenti.

  1.
$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2+5}{2n^2+4}\right)^{n^2} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2+4-4+5}{2n^2+4}\right)^{n^2} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n^2+4}\right)^{n^2} =$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n^2+4}\right)^{(2n^2+4)\cdot\frac{n^2}{2n^2+4}} = e^{\frac{1}{2}}$$

  2.
$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n+1}{3n-5}\right)^{n-2} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n-5+5+1}{3n-5}\right)^{n-2} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{6}{3n-5}\right)^{n-2} =$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{6}{3n-5}\right)^{\frac{3n-5}{6}\cdot\frac{6(n-2)}{3n-5}} = e^2$$

- Sia a_n una successione tale che $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$. Proviamo che
$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e$$
.

  Prova (cenno). Il fatto che $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ ci assicura che definitivamente $a_n > 0$ e che la successione delle parti intere $[a_n]$ diverge ($a_n - 1 < [a_n]$).

  Da qui abbiamo che, indicata con k_n la parte intera di $[a_n]$ [6], si ha
$$1+\frac{1}{k_n+1} < 1+\frac{1}{a_n} \leq 1+\frac{1}{k_n}$$
  e di conseguena
$$\left(1+\frac{1}{k_n+1}\right)^{k_n} < \left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n} < \left(1+\frac{1}{k_n}\right)^{k_n+1}.$$
  Ora in modo del tutto analogo a quanto fatto in $(*)$, si osservi per la successione a sinistra che
$$\left(1+\frac{1}{k_n+1}\right)^{k_n} = \frac{\left(1+\frac{1}{k_n+1}\right)^{k_n+1}}{\left(1+\frac{1}{k_n+1}\right)}$$
  Quindi la successione al numeratore converge ad e, essendo una *sottosuccessione* della successione convergente $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, e la successione al denominatore converge a 1.

  In modo analogo si vede che anche la successione a destra converge ad e, per cui per il teorema del confronto (carabinieri) si ha che la successione al centro converge ad e.

[6]$(k_n \leq a_n < k_n + 1\ )$

2 Serie

2.1 Qualche serie di base.

Avvertenza: le serie trattate in queste note si intenderanno sempre a termini positivi.

Come per le successioni, anche per le serie un metodo efficiente per determinarne la natura è quello di confrontarle con altre serie di cui si conosce il comportamento.

Serie numeriche che possono servire come confronto per stabilire la natura di altre serie sono

1. *La serie geometrica* $\sum a^n$
2. *La serie armonica* $\sum \frac{1}{n}$
3. *La serie armonica generalizzata* $\sum \frac{1}{n^\alpha}$

Questo appare evidente anche nella prova di due criteri analoghi a quelli del rapporto e della radice provati per le successioni.

Criteri 2.1. *Sia* $\sum a_n$ *una serie a termini positivi. Allora*

- **(rapporto)***Sia* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = l$. *Se* $l < 1$ *allora la serie converge, se* $l > 1$ *allora la serie diverge e nulla si puo' dire se* $l = 1$
- **(radice)***Sia* $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = l$. *Se* $l < 1$ *allora la serie converge, se* $l > 1$ *allora la serie diverge e nulla si puo' dire se* $l = 1$

La prova è del tutto analoga a quella degli analoghi criteri per le successioni. In particolare per il criterio del rapporto si noti che se $\frac{a_{n+1}}{a_n} < C$ si ha che $a_2 < Ca_1, a_3 < C^2a_1, \ldots, a_{n+1} < C^n a_1$ e quindi la serie $\sum a_n$ può essere maggiorata, a meno del termine a_1, con una serie geometrica: $\sum a_n \leq a_1 \sum C^n$. Da qui le conclusioni se $C < 1$.

Vediamo più da vicino il comportamento di queste serie. In particolare la serie geometrica è stata già trattata diffusamente in varie altre dispense: qui ripetiamo brevemente per completezza le considerazioni fatte al fine di stabilire la natura di questa serie.

1. *La serie geometrica* $\sum a^n$

   Ricordiamo che

$$(1-a)(1+a+a^2+\cdots+a^n) = 1-a^{n+1}$$

da cui abbiamo immediatamente che

$$\sum_0^n a^j = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}$$

e quindi che se $|a| < 1$ la serie converge a $\frac{1}{1-a}$ mentre diverge se $a \geq 1$ (e non converge se $a < -1$).

2. *La serie armonica* $\sum \frac{1}{n}$

   Per stabilire la natura di questa serie maggioriamo le ridotte spezzando opportunamente il numero di elementi su cui sommiamo.

$$1 < 1$$
$$\frac{1}{2} = 2\frac{1}{4} < \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$$
$$\frac{1}{2} = 4\frac{1}{8} < \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7}$$
$$\cdots$$
$$\frac{1}{2} = 2^k \frac{1}{2^{k+1}} < \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^k+1} + \cdots \frac{1}{2^k+2^k-1}$$

   Otteniamo quindi per la successione delle somme parziali dei termini fino al $2^{n+1}-1$-esimo la minorazione

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2} < 1 + \sum_2^{2^{n+1}-1} \frac{1}{n}$$

   per cui la serie armonica diverge.

3. *La serie armonica generalizzata.*

   Per studiare questa serie utilizziamo la stessa idea del punto precedente, cioè un opportuno spezzamento della lunghezza delle ridotte.

   Lemma 2.2. (Lemma di condensazione) *Sia a_n una serie a termini positivi decrescenti. Allora, raggruppando opportunamente i termini si ha che per la somma dei primi $2^{k+1}-1$ termini vale, ponendo $N = 2^{k+1}-1$*

$$\sum_{j=0}^{k} 2^j a_{2^{j+1}} < \sum_{j=1}^{N} a_j < \sum_{j=0}^{k} 2^j a_{2^j}$$

   Prova. Procediamo in maniera analoga a quanto fatto per la serie armonica.

$$a_2 < a_1 < a_1$$
$$2a_4 < a_2 + a_3 < 2a_2$$
$$2^2 a_8 < a_4 + a_5 + a_6 + a_7 < 2^2 a_4$$

$$2^3 a_{16} < a_8 + a_9 + a_{10} + \cdots + a_{15} < 2^3 a_8$$

$$\cdots$$

$$2^j a_{2^{j+1}} < a_{2^j} + \quad \cdots \quad + a_{2^{j+1}-1} < 2^j a_{2^j}$$

Sommando otteniamo per le ridotte

$$\sum_{j=0}^{k} 2^j a_{2^{j+1}} < \sum_{i=1}^{2^{k+1}-1} a_i < \sum_{j=0}^{k} 2^j a_{2^j}$$

Applicando questo alla serie armonica generalizzata, indicando per brevità con $n(k)$ l'intero $2^{k+1} - 1$, abbiamo

$$\sum_{j=0}^{k} 2^j \frac{1}{2^{(j+1)\alpha}} < \sum_{n=1}^{n(k)} \frac{1}{n^\alpha} < \sum_{j=1}^{k} 2^j \frac{1}{2^{j\alpha}}$$

quindi $\displaystyle\sum_{n=1}^{n(k)} \frac{1}{n^\alpha} < \sum_{j=0}^{k} \big(\frac{1}{2^{\alpha-1}}\big)^j$ e quindi essendo quest'ultima una serie geometrica di ragione $\frac{1}{2^{\alpha-1}}$ converge se $\alpha > 1$

2.2 Serie telescopiche.

Un tipo di serie abbastanza agevoli da trattare sono le cosiddette *serie telescopiche,* cioè le serie della forma

$$\sum (a_k - a_{k+\nu})$$

con $\nu \geq 1$, in cui, volendo serie a termini positivi, dobbiamo supporre che la successione a_n sia decrescente.

Volendo valutare le somme parziali $\sigma_n = \sum_1^n (a_k - a_{k+\nu})$, iniziamo dal caso $\nu = 1$. In tal caso risulta immediatamente che $\sigma_n = \sum_1^n (a_k - a_{k+1}) = a_1 - a_{n+1}$ e quindi se $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ allora $\sum (a_k - a_{k+1}) = \lim_{n\to\infty} \sigma_n = a_1 - L$.

Nel caso generale, per le somme parziali si ha, se $n \geq \nu$, $\sigma_n = \sum_1^n (a_k - a_{k+\nu}) = a_1 + a_2 + \ldots + a_\nu - a_{n+1} - \ldots - a_{n+\nu}$ e quindi se $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$ allora $\sum (a_k - a_{k+\nu}) = a_1 + a_2 + \ldots + a_\nu - \nu L$.

Vediamo alcuni esempi.

1. $\displaystyle\sum \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$.

   È immediato che questa serie converge a 1

2. $\displaystyle\sum \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+2)^2}$. Serie telescopica in cui $a_n = \dfrac{1}{n^2}$

3. $\sum \frac{3}{n^2+3n}$.È immediato ricondursi a una serie telescopica ossservando che $\frac{3}{n^2+3n} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+3}$.

4. $\sum \frac{k}{n^2+kn}$ con k numero intero.

5. $\sum \frac{1}{n^2-n}$.
   Per la convergenza della serie basterebbe osservare che per $n > 2$ si ha $2n < n^2$ da cui $n^2 - n > \frac{n^2}{2}$ per cui $\frac{1}{n^2-n} < \frac{2}{n^2}$, serie quest'ultima che è convergente essendo una serie armonica generalizzata con esponente maggiore di 1. Riconoscere il carattere telescopico ci permette in più di calcolarne la somma. $\frac{1}{n^2-n} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$. Calcolando le somme parziali otteniamo $\sigma_n = 1 - \frac{1}{n}$ e poiché $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ abbiamo che la somma è 1.

2.3 Miscellanea.

Studiare il comportamento delle serie seguenti

1. $\sum \frac{n^2+1}{3^n}$
   Convergente. Dal criterio del rapporto abbiamo $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{3}$.

2. $\sum \frac{7^n}{n!}$
   Convergente. Dal criterio del rapporto.

3. $\sum \frac{n^n}{(2n+1)^n}$
   Convergente. Dal criterio della radice.

4. $\sum 6^n \left(\frac{n-3}{n}\right)^{n^2}$
   Convergente. Usando il criterio della radice abbiamo che $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 6e^{-3} < 1$.

5. $\sum \frac{n!}{n^n}$
   Convergente. Criterio del rapporto.

6. $\sum (\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n}+1})$. [7]

[7] Attenzione, questa serie non è telescopica.

Osserviamo che per il termine generico si ha $\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n}+1} = \frac{1}{\sqrt{n}(\sqrt{n}+1)} \geq \frac{1}{2n}$. Pertanto la serie diverge essendo minorata da una serie armonica.

7. $\sum \frac{n\sqrt{n}}{n^3+1}$

Convergente. Infatti operando manipolazioni algebriche sul termine generico otteniamo $\frac{n\sqrt{n}}{n^3+1} = \frac{n^{\frac{3}{2}}}{n^3+1} \leq \frac{n^{\frac{3}{2}}}{n^3} \leq \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$. La serie $\sum \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ converge poiché è una serie armonica generalizzata con esponente maggiore di 1.

8. $\sum \frac{\sqrt{n}+1}{n^3+1}$

Convergente. Per il termine generico vale $a_n \leq \frac{2\sqrt{n}}{n^3} = \frac{2}{n^{\frac{5}{2}}}$ e quindi la serie può essere maggiorata con una serie armonica convergente perché $\frac{5}{2} > 1$.

9. $\sum \frac{2n}{\sqrt{n^3+1}}$.

Divergente. Operando sul termine generico otteniamo $\frac{2n}{\sqrt{n^3+1}} \geq \frac{2n}{\sqrt{n^3+n^3}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{2}}{n^{\frac{1}{2}}}$ e poiché $\frac{1}{2} < 1$ la serie armonica generalizzata diverge.

10. $\sum \frac{n!}{n^n}$

11. $\sum \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{\sqrt{n^3}}$

12. $\sum \frac{\log n!}{n^3}$

13. $\sum \frac{\log n}{n^2}$

Osserviamo che $\frac{\log n}{n^2} < \frac{n}{n^2}$ e che questa serie diverge essendo la serie armonica. Se tentiamo di ottenere informazioni dal criterio del rapporto abbiamo che $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\log(n+1)}{\log n} \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^2$ e entrambi i termini del prodotto convergono a 1.

Quindi entrambi i tentativi falliscono.

Proviamo con il criterio di condensazione. Otteniamo $a_{2^n} = \frac{\log(2^n)}{2^{2n}} = \frac{n\log 2}{2^{2n}}$ quindi $\sum a_n \leq \sum 2^n a_{2n} = \sum \frac{n\log 2}{2^n}$. Quindi a meno del termine $\log 2$ siamo ricondotti a studiare il carattere della serie $\sum \frac{n}{2^n}$

cosa che si fa in modo agevole con il criterio della radice poiché $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{2} = \frac{1}{2}$. Quindi in definitiva la serie data converge perché tramite il criterio di condensazione si riesce a maggiorare con una serie convergente.