Analisi I - IngBM - 2013-14
COMPITO B 20 settembre 2014

COGNOME .... NOME ....

MATRICOLA........................ VALUTAZIONE ..... + ... = ...

1. Istruzioni

Gli esercizi devono essere svolti negli appositi spazi del presente fascicolo; **solo questo sarà ritirato e valutato.** *I fogli a quadretti messi a disposizione possono essere usati liberamente ma in nessun caso saranno ritirati. Il compito è composto di due parti. La prima parte deve essere svolta preliminarmente. Essa verrà corretta per prima e valutata con un punteggio di $0 \le x \le 10$ punti. Condizione necessaria affinché venga preso in considerazione l'eventuale svolgimento della seconda parte è che $x \ge 6$. In tal caso la seconda parte viene valutata con un punteggio di $0 \le y \le 24$ punti. Il compito sarà sufficiente per l'ammissione alla prova orale se $x + y \ge \mathbf{18}$. In tal caso il voto di ammissione all'orale sarà $v = \min(28, x + y)$.*

2. Prima parte

Esercizio 0 (punti 0). Leggere e capire le istruzioni.

Esercizio 1.(3 punti)
Dire se esiste il seguente limite e nel caso esista calcolarlo.

$$L = \lim_{x\to 1} \frac{\log(x^3)}{x-1}$$

SOLUZIONE.
☐Il limite L non esiste perché

$\boxed{\text{x}}$ Il limite L esiste e vale 3.
Siamo nelle condizioni di poter applicare il teorema dell'Hopital, pertanto

$$\lim_{x\to 1} \frac{\log(x^3)}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{x^3}\cdot 3x^2}{1} = 3$$

Esercizio 2.(3 punti) Calcolare, giustificando il risultato ottenuto, il seguente integrale definito

$$I := \int_0^1 x^2 e^{5x} dx$$

SOLUZIONE. $I = \dfrac{1}{125}(17e^5 - 2)$, perché. integrando ripetutamente per parti si ottiene

$$\begin{aligned}\int x^2 e^{5x} dx &= \frac{1}{5}x^2e^{5x} - \frac{2}{5}\int xe^{5x}dx = \\ &= \frac{1}{5}x^2e^{5x} - \frac{2}{5}(\frac{1}{5}xe^{5x} - \frac{1}{5}\int e^{5x}dx) = \\ &= \frac{1}{5}x^2e^{5x} - \frac{2}{5}(\frac{1}{5}xe^{2x} - \frac{1}{5}\cdot(\frac{1}{5}e^{5x})) = \\ &= \frac{1}{5}e^{5x}(x^2 - \frac{2}{5}x + \frac{2}{25})\end{aligned}$$

Da cui, $I = \left|\dfrac{e^{5x}}{5}(x^2 - \dfrac{2}{5}x + \dfrac{2}{25})\right|_0^1 = \dfrac{1}{125}(17e^5 - 2)$

Esercizio 3.(4 punti) Costruire una funzione elementare continua $f : D \to \mathbf{R}$, specificandone l'insieme di definizione $D \subset \mathbf{R}$, tale che la retta $x = -1$ e la retta $y = -1$ sono rispettivamente il solo asintoto verticale e il solo asintoto orizzontale di f.

SOLUZIONE

Una funzione che soddisfa le richieste è la funzione dal dominio $D = \mathbf{R} \setminus \{-1\}$ a $\mathbf{R}$ definita da $f(x) = \dfrac{1-x}{x+1}$.

f è una funzione tale che le rette $x = -1$ e $y = -1$ sono rispettivamente il solo asintoto verticale e il solo asintoto orizzontale del grafico ed inoltre f è elementare perché costruita applicando ripetutamente le procedure di somma, reciproco, opposto e prodotto a partire dalla funzione identità $a = x \to x$, e dalle due funzioni costanti $a_1 = x \to -1$ e $a_2 = x \to 1$.

Infatti per costruire f si puó procedere prima sommando la funzione identità rispettivamente alle due funzioni costanti a_1 e a_2, ottenendo le due funzioni $\alpha = x \to a(x) + a_1(x) = x - 1$ e $\beta = x \to a(x) + a_2(x) = x + 1$, poi costruendo, tramite una operazione di opposto, la funzione $\alpha' = x \to -\alpha(x) = 1 - x$ e tramite una operazione di reciproco la funzione $\gamma = x \to \dfrac{1}{\beta(x)} = \dfrac{1}{x+1}$ e infine la f con una operazione di prodotto $f = x \to \alpha'(x) \cdot \gamma(x) = (1-x) \cdot \left(\dfrac{1}{x+1}\right) = \dfrac{1-x}{x+1}$.

Essendo le funzioni a, a_1, a_2 definite su tutto $\mathbf{R}$ anche le funzioni α, α' e β risultano definite su tutto $\mathbf{R}$. La funzione γ risulta definita su $\mathbf{R} \setminus \{\beta = 0\}$ cioè $\mathbf{R} \setminus \{-1\}$ e così la funzione f risulta definita in $D = \mathbf{R} \setminus \{-1\}$.

3. Seconda parte

Esercizio 1.(1,5 punti) Una funzione $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ si dice *buona* se $\forall \alpha \in \mathbf{R},\ f(\alpha) \geq 0$. Negando questa definizione, dare la definizione di funzione *non buona*.

SOLUZIONE.
Una funzione $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ è *non buona* se $\exists \alpha \in \mathbf{R}$ tale che $f(\alpha) < 0$.

Esercizio 2.(1,5 punti) Siano $A,\ B,\ C$ insiemi finiti, $|A| = 2,\ |B| = 5,\ |C| = 4$, $C \subset B$. Determinare il numero n delle applicazioni iniettive $f : A \to B$ tali che l'mmagine $\mathrm{Im}(f)$ di f è tutta contenuta in $B \setminus C$.

SOLUZIONE.
$n = 0$. Infatti poiché $|A| = 2$ e $|B \setminus C| = 1$ una qualsiasi applicazione tra un insieme con 2 elementi ed un insieme con un solo elemento non può essere iniettiva.

Esercizio 3.(4 punti)
1) Dato $z = 1 + i \in \mathbf{C}$, determinare $w = a + ib \in \mathbf{C}$ tale che $zw = 1 + 2i$.
2) Determinare tutte le soluzioni $z \in \mathbf{C}$ dell'equazione $e^z = 1 - i$.

SOLUZIONE.
1) $w = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}i$.
$w = \frac{1+2i}{1+i} = \frac{1+2i}{1+i} \cdot \frac{1-i}{1-i} = \frac{(1+2i)(1-i)}{2} = \frac{3+i}{2}$

2) Le soluzioni dell'equazione sono $z = \log\sqrt{2} - i\frac{\pi}{4} + 2k\pi i$ con $k \in \mathbf{Z}$.
Infatti se $z = x + iy$ è soluzione dell'equazione si deve avere

$$e^x(\cos y + i \sin y) = 1 - i = \sqrt{2}(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}) = \sqrt{2}(\cos(-\frac{\pi}{4}) + i\sin(-\frac{\pi}{4}))$$

Da cui si ottiene $x = \log\sqrt{2}$ e $y = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$ cioè $z = \log\sqrt{2} - i\frac{\pi}{4} + 2k\pi i$ con $k \in \mathbf{Z}$

Esercizio 4.(9 punti) Si consideri la funzione $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definita da:

$$f(x) = \begin{cases} e^{\frac{x+1}{1-x}} & \text{se } x > 1, \\ 0 & \text{se } x = 1, \\ \min(0, e^{\frac{x+1}{1-x}}) & \text{se } x < 1. \end{cases}$$

(1) Determinare, giustificando la risposta, il più grande sottoinsieme $D \subset \mathbf{R}$ tale che la restrizione di f su D è continua.

(2) Determinare, giustificando la risposta, il più grande sottoinsieme $D' \subset \mathbf{R}$ tale che la restrizione di f su D' è derivabile.

(3) Determinare gli asintoti della funzione f.

(4) Determinare tutti i punti di minimo locale della funzione f.

(5) Determinare tutti i punti di massimo locale della funzione f.

SOLUZIONE.

1) L'espressione $e^{\frac{x+1}{1-x}}$ definisce una funzione in tutti i punti di $\mathbf{R}$ tranne il punto 1; in questo insieme tale funzione è continua e positiva.

Quindi per $x < 1$ la funzione f vale identicamente 0, è continua e $\lim_{x \to 1^-} f(x) = 0$.

Osservando che $\lim_{x \to 1^+} f(x) = 0$, perché $\lim_{x \to 1^+} \dfrac{x+1}{1-x} = -\infty$, si può concludere che la f è una funzione continua su tutto $\mathbf{R}$.

2) La derivata di f nei punti $x < 1$ è identicamente nulla. Nei punti $x > 1$ essa vale $\dfrac{2}{(1-x)^2}\, e^{\frac{x+1}{1-x}}$.

Per vedere se f è derivabile nel punto 1 calcoliamo il limite del rapporto incrementale. A sinistra di 1 tale limite vale 0. A destra si ha

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(1+h)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{e^{-(1+\frac{2}{h})}}{h}$$

Ponendo $T = \dfrac{1}{h}$ si ha $\lim_{h \to 0^+} \dfrac{e^{-1-\frac{2}{h}}}{h} = \lim_{T \to +\infty} \dfrac{e^{-1}T}{e^{2T}} = 0$.

Pertanto la funzione è derivabile in tutto $\mathbf{R}$. [1]

3) Essendo la funzione per $x < 1$ identicamente nulla, l'asse delle x è un asintoto orizzontale per la funzione.

Essendo $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \dfrac{1}{e}$ abbiamo che anche la retta $y = \dfrac{1}{e}$ è un asintoto orizzontale per $x \to +\infty$ a cui il grafico della funzione si avvicina da sotto: l'esponente $\dfrac{x+1}{1-x}$ per $x \to +\infty$ è infatti definitivamente minore di -1.

[1] Si può anche mostrare che la derivata è continua in 1. Essendo la funzione a sinistra di 1 identicamente nulla basta calcolare il limite di $\dfrac{2}{(1-x)^2}\, e^{\frac{x+1}{1-x}}$ per $x \to 1^+$. Poniamo $T = \dfrac{1}{1-x}$: si ha

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{2}{(1-x)^2}\, e^{\frac{x+1}{1-x}} = \lim_{T \to -\infty} 2T^2 e^{-1+2T} = \lim_{T \to -\infty} 2e^{-1} T^2 e^{2T} = 0$$

4) e 5) La funzione è identicamente 0 per $x \leq 1$ e è crescente per $x > 1$ (la derivata per $x > 1$ è positiva) per cui l'insieme dei punti di minimo locale è $\{x \in \mathbf{R} \mid x \leq 1\}$ mentre l'insieme dei punti di massimo locale è $\{x \in \mathbf{R} \mid x < 1\}$

Esercizio 5.(8 punti) Determinare l'integrale generale dell'equazione differenziale:

$$y'' - 3y' + 2y = e^{2x}$$

SOLUZIONE
Essendo le radici del polinomio caratteristico 1 e 2 si ha che la soluzione generale dell'equazione omogenea è $C_1e^{2x} + C_2e^x$.
Con uno dei vari metodi si calcola che xe^{2x} è una soluzione particolare: ad esempio cercando un integrale del tipo $(Ax + B)e^{2x}$ e facendo esplicitamente i calcoli si ottiene $A = 1$ e $B =$ qualsiasi, cioè che un integrale particolare è del tipo $(x + c)e^{2x}$ ma poiché ce^{2x} è anche soluzione dell'omogenea basta considerare solo xe^{2x}
Per cui l'integrale generale dell'equazione è $C_1e^{2x} + C_2e^x + xe^{2x}$.