Analisi I - IngBM - 2013-14
COMPITO A 20 settembre 2014

COGNOME .... NOME ....

MATRICOLA...................... VALUTAZIONE ..... + ... = ...

1. Istruzioni

Gli esercizi devono essere svolti negli appositi spazi del presente fascicolo; **solo questo sarà ritirato e valutato.** *I fogli a quadretti messi a disposizione possono essere usati liberamente ma in nessun caso saranno ritirati. Il compito è composto di due parti. La prima parte deve essere svolta preliminarmente. Essa verrà corretta per prima e valutata con un punteggio di $0 \leq x \leq 10$ punti. Condizione necessaria affinché venga preso in considerazione l'eventuale svolgimento della seconda parte è che $x \geq 6$. In tal caso la seconda parte viene valutata con un punteggio di $0 \leq y \leq 24$ punti. Il compito sarà sufficiente per l'ammissione alla prova orale se $x + y \geq \mathbf{18}$. In tal caso il voto di ammissione all'orale sarà $v = \min(28, x + y)$.*

2. Prima parte

Esercizio 0 (punti 0). Leggere e capire le istruzioni.

Esercizio 1.(3 punti)
Dire se esiste il seguente limite e nel caso esista calcolarlo.

$$L = \lim_{x\to 1} \frac{\log(x^2)}{x^2 - 1}$$

SOLUZIONE.
☐ Il limite L non esiste perché

$\boxed{\text{x}}$ Il limite L esiste e vale 1.
Siamo nelle condizioni di poter applicare il teorema dell'Hopital, pertanto

$$\lim_{x\to 1} \frac{\log(x^2)}{x^2 - 1} = \lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{x^2} \cdot 2x}{2x} = 1$$

Esercizio 2.(3 punti) Calcolare, giustificando il risultato ottenuto, il seguente integrale definito

$$I := \int_0^1 x^2 e^{2x} dx$$

SOLUZIONE.

$I = \frac{1}{4}(e^2 - 1)$, perché, integrando ripetutamente per parti si ottiene

$$\begin{aligned}
\int x^2 e^{2x} dx &= \frac{1}{2}x^2 e^{2x} - \int x e^{2x} dx = \\
&= \frac{1}{2}x^2 e^{2x} - (\frac{1}{2}x e^{2x} - \frac{1}{2}\int e^{2x} dx) = \\
&= \frac{1}{2}x^2 e^{2x} - (\frac{1}{2}x e^{2x} - \frac{1}{2}\cdot(\frac{1}{2}e^{2x})) = \\
&= \frac{1}{2}e^{2x}(x^2 - x + \frac{1}{2})
\end{aligned}$$

Da cui, $I = \left|\frac{1}{2}e^{2x}(x^2 - x + \frac{1}{2})\right|_0^1 = \frac{1}{4}(e^2 - 1)$

Esercizio 3.(4 punti) Costruire una funzione elementare continua $f : D \to \mathbf{R}$, specificandone l'insieme di definizione $D \subset \mathbf{R}$, tale che la retta $x = 1$ e la retta $y = 1$ sono rispettivamente il solo asintoto verticale e il solo asintoto orizzontale di f.

SOLUZIONE.

Una funzione che soddisfa le richieste è la funzione dal dominio $D = \mathbf{R} \setminus \{1\}$ a $\mathbf{R}$ definita da $f = \frac{x+1}{x-1}$.

f è una funzione tale che le rette $x = 1$ e $y = 1$ sono rispettivamente il solo asintoto verticale e il solo asintoto orizzontale del grafico ed inoltre f è elementare perché costruita applicando ripetutamente le procedure di somma, reciproco e prodotto a partire dalla funzione identità $a = x \to x$, e dalle due funzioni costanti $a_1 = x \to 1$ e $a_2 = x \to -1$. Infatti per costruire f si puó procedere prima sommando la funzione identità rispettivamente alle due funzioni costanti a_1 e a_2, ottenendo le due funzioni $\alpha = x \to a(x) + a_1(x) = x + 1$ e $\beta = x \to a(x) + a_1(x) = x - 1$, poi costruendo, tramite una operazione di reciproco, la funzione $\gamma = x \to \frac{1}{\beta(x)} = \frac{1}{x-1}$ e infine la f con una operazione di prodotto $f = x \to \alpha(x)\cdot\gamma(x) = (x+1)\cdot\left(\frac{1}{x-1}\right) = \frac{x+1}{x-1}$.

Essendo le funzioni a, a_1, a_2 definite su tutto $\mathbf{R}$ anche la funzioni α e β risultano definite su tutto $\mathbf{R}$. La funzione γ risulta definita su $\mathbf{R} \setminus \{\beta = 0\}$ cioè $\mathbf{R} \setminus \{1\}$ e così la funzione f risulta definita in $D = \mathbf{R} \setminus \{1\}$.

3. Seconda parte

Esercizio 1.(1,5 punti) Una funzione $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ si dice *buona* se $\forall \alpha \in \mathbf{R},\ f(\alpha) < 0$. Negando questa definizione, dare la definizione di funzione *non buona*.

SOLUZIONE.
Una funzione $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ è *non buona* se $\exists \alpha \in \mathbf{R}$ tale che $f(\alpha) \geq 0$.

Esercizio 2.(1,5 punti) Siano A, B, C insiemi finiti, $|A| = 1$, $|B| = 5$, $|C| = 4$, $C \subset B$. Determinare il numero n delle applicazioni iniettive $f : A \to B$ tali che l'mmagine $\mathrm{Im}(f)$ di f è tutta contenuta in $B \setminus C$.

SOLUZIONE.
$n = 1$. Poichè $|B \setminus C| = 1$ c'è una sola applicazione che manda l'unico elemento di A nell'unico elemento di C. Notare tra l'altro che tutte le applicazioni da A in B sono iniettive, perché $|A| = 1$.

Esercizio 3.(4 punti)
1) Dato $z = 2 + i \in \mathbf{C}$, determinare $w = a + ib \in \mathbf{C}$ tale che $zw = 3 + 2i$.
2) Determinare tutte le soluzioni $z \in \mathbf{C}$ dell'equazione $2e^z = 1 + i$.

SOLUZIONE.
1) $w = \frac{8}{5} + \frac{1}{5}i$.
$w = \frac{3+2i}{2+i} = \frac{3+2i}{2+i} \cdot \frac{2-i}{2-i} = \frac{(3+2i)(2-i)}{5} = \frac{8+i}{5}$

2) Le soluzioni dell'equazione sono $z = \log\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\pi}{4} + 2k\pi i$ con $k \in \mathbf{Z}$.
Infatti se $z = x + iy$ è soluzione dell'equazione si deve avere

$$e^x(\cos y + i \sin y) = \frac{1}{2} + i\frac{1}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})$$

Da cui si ottiene $x = \log\frac{\sqrt{2}}{2}$ e $y = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ cioè $z = \log\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\pi}{4} + 2k\pi i$ con $k \in \mathbf{Z}$

Esercizio 4.(9 punti) Si consideri la funzione $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definita da:

$$f(x) = \begin{cases} e^{\frac{x-1}{x+1}} & \text{se } x > -1, \\ 0 & \text{se } x = -1, \\ \min(0, e^{\frac{x-1}{x+1}}) & \text{se } x < -1. \end{cases}$$

(1) Determinare, giustificando la risposta, il più grande sottoinsieme $D \subset \mathbf{R}$ tale che la restrizione di f su D è continua.

(2) Determinare, giustificando la risposta, il più grande sottoinsieme $D' \subset \mathbf{R}$ tale che la restrizione di f su D' è derivabile.

(3) Determinare gli asintoti della funzione f.

(4) Determinare tutti i punti di minimo locale della funzione f.

(5) Determinare tutti i punti di massimo locale della funzione f.

SOLUZIONE.
1) L'espressione $e^{\frac{x-1}{x+1}}$ definisce una funzione in tutti i punti di $\mathbf{R}$ tranne il punto -1; in questo insieme tale funzione è continua e positiva.
Quindi per $x < -1$ la funzione f vale identicamente 0, è continua e $\lim_{x \to -1^-} f(x) = 0$.
Osservando che $\lim_{x \to -1^+} f(x) = 0$, perché $\lim_{x \to -1^+} \dfrac{x-1}{x+1} = -\infty$, si può concludere che la f è una funzione continua su tutto $\mathbf{R}$.
2) La derivata di f nei punti $x < -1$ è identicamente nulla. Nei punti $x > -1$ essa vale $\dfrac{2}{(x+1)^2} e^{\frac{x-1}{x+1}}$.
Per vedere se f è derivabile nel punto -1 calcoliamo il limite del rapporto incrementale. A sinistra di -1 tale limite vale 0. A destra si ha

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(-1+h)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{e^{1-\frac{2}{h}}}{h}$$

Ponendo $T = \dfrac{1}{h}$ si ha $\lim_{h \to 0^+} \dfrac{e^{1-\frac{2}{h}}}{h} = \lim_{T \to +\infty} \dfrac{eT}{e^{2T}} = 0$.
Pertanto la funzione è derivabile in tutto $\mathbf{R}$. [1]

3) Essendo la funzione per $x < -1$ identicamente nulla, l'asse delle x è un asintoto orizzontale per la funzione.
Essendo $\lim_{x \to +\infty} f(x) = e$ abbiamo che anche la retta $y = e$ è un asintoto orizzontale per $x \to +\infty$ a cui il grafico della funzione si avvicina da sotto: l'esponente $\dfrac{x-1}{x+1}$ per $x \to \infty$ è infatti definitivamente minore di 1.

[1] Si può anche mostrare che la derivata è continua in -1. Essendo la funzione a sinistra di -1 identicamente nulla basta calcolare il limite di $\dfrac{2}{(x+1)^2} e^{\frac{x-1}{x+1}}$ per $x \to -1^+$: poniamo $T = \dfrac{1}{x+1}$; si ha

$$\lim_{x \to -1^+} \frac{2}{(x+1)^2} e^{\frac{x-1}{x+1}} = \lim_{T \to \infty} 2T^2 e^{1-2T} = \lim_{T \to \infty} \frac{2eT^2}{e^{2T}} = 0$$

4) e 5) La funzione è identicamente 0 per $x \leq -1$ e è crescente per $x > -1$ (la derivata per $x > -1$ è positiva) per cui l'insieme dei punti di minimo locale è $\{x \in \mathbf{R} \mid x \leq -1\}$ mentre l'insieme dei punti di massimo locale è $\{x \in \mathbf{R} \mid x < -1\}$

Esercizio 5.(8 punti) Determinare l'ntegrale generale dell'equazione differenziale:

$$y'' - 4y' + 3y = e^{2x}$$

SOLUZIONE.
Essendo le radici del polinomio caratteristico 1 e 3 si ha che la soluzione generale dell'equazione omogenea è $C_1e^{3x} + C_2e^x$.
Con uno dei vari metodi si calcola che $-e^{2x}$ è una soluzione particolare: ad esempio cercando un integrale del tipo $(Ax + B)e^{2x}$ e facendo esplicitamente i calcoli si ottiene $A = 0$ e $B = -1$.
Per cui l'integrale generale dell'equazione è $C_1e^{3x} + C_2e^x - e^{2x}$.