Analisi I - IngBM - 2013-14
COMPITO A 1 Febbraio 2014

COGNOME .... NOME ....

MATRICOLA....................... VALUTAZIONE ..... + ... = ...

Istruzioni
Il compito è composto di due parti. *La prima parte deve essere svolta preliminarmente. Essa verrà corretta per prima e valutata con un punteggio di* $0 \leq x \leq 10$ *punti.* *Condizione necessaria affinché venga preso in considerazione l'eventuale svolgimento della seconda parte è che* $x \geq 6$. *In tal caso la seconda parte viene valutata con un punteggio di* $0 \leq y \leq 24$ *punti.* *Il compito sarà sufficiente per l'ammissione alla prova orale se* $x + y \geq 19$. *In tal caso il voto di ammissione all'orale sarà* $v/30$, *dove* $v = \min(28, x + y)$.

1. Prima parte

Esercizio 0 (punti 0). Leggere e capire le istruzioni.

Esercizio 1 (punti 3). Calcolare il limite

$$L = \lim_{x \to 0} \log(\frac{1 - (\cos(x))^2}{x^2})$$

> $L = 0$. `Infatti ricordando che` $1 - (\cos(x))^2 = (\sin(x))^2$`, abbiamo` $\lim_{x \to 0} \log(\frac{\sin(x)}{x})^2 = \log(1) = 0$ `dove dentro la parentesi abbiamo usato un limite notevole.`

Esercizio 2 (3 punti).

a Determinare il più grande sottoinsieme D di $\mathbf{R}$ tale che la formula $f(x) = e^{\sqrt{\sin(x)-1}}$ definisca una funzione $f : D \to \mathbf{R}$.

b Determinare la parte interna $\overset{\circ}{D}$ di D.

c Dire se l'insieme D è limitato superiormente o no; se lo è calcolarne l'estremo superiore mentre se non lo è dire se la funzione $f : D \to \mathbf{R}$ ammette limite per $x \in D$, $x \to +\infty$ e, nel caso, calcolarlo.

a $D=\{\pi/2+2n\pi \mid n \in \mathbf{Z}\}$. Infatti $x \in D$ se e solo se $\sin(x)-1 \geq 0$ e in tal caso $\sin(x)=1$.

b $\overset{\circ}{D}=\emptyset$. Infatti per ogni $x \in D$, $\epsilon > 0$, l'intervallo $I=(x-\epsilon, x+\epsilon)$ non è contenuto in D; infatti $I \cap D$ è finito.

c ☐SI l'insieme D è limitato superiormente e il suo estremo superiore è $\boxed{}$

$\boxed{\text{X}}$ NO L'insieme D non è limitato superiormente; infatti per ogni $M \in \mathbf{R}$ esiste $n \in \mathbb{N}$, $n > 0$ abbastanza grande tale che $n > M/2\pi - 1/4$.

☐NO $\lim\limits_{x \in D, x \to +\infty} f(x)$ non esite

$\boxed{\text{X}}$ SI $\lim\limits_{x \in D, x \to +\infty} f(x)$ esite e vale $\boxed{1}$.

Infatti la funzione $f: D \to \mathbf{R}$, $f(\pi/2+2n\pi)=e^{\sqrt{0}}=1$, è costante uguale a 1

Esercizio 3 (3 punti). Dimostrare che per ogni $n \in \mathbb{N}$ $\displaystyle\int_{-1}^{1} x^{2n}\sin(x)dx = 0$.

Osserviamo che la funzione $f(x) = x^{2n}\sin(x)$ definita su tutto $\mathbf{R}$ è dispari, cioè $f(-x) = -f(x)$. Poiché l'intervallo di integrazione $[-1,1]$è simmetrico rispetto a 0, segue che l'integrale definito è nullo.

Esercizio 4 (1 punto). Dire se la seguente affermazione è vera o falsa:

Sia $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ continua. Sia $x \in \mathbf{R}$ un punto di massimo locale per f. Allora f è derivabile in x e $f'(x)=0$.

☐Vera $\boxed{\text{X}}$ Falsa

perché f non è necessariamente derivabile in un punto di massimo locale. Si consideri per esempio $f(x) = -|x|$, dove 0 è un punto di massimo.

2. Seconda parte

Esercizio 1 (punti 3). Siano a, b, c tre numeri complessi distinti tali che

$$a^3 = b^3 = c^3 = 1$$

è vero che $a + b + c = 0$?

$\boxed{\text{x}}$ Vero ☐Falso

perché i numeri a, b, c, sono le radici complesse distinte del polinomio $x^3 - 1 = (x - a)(x - b)(x - c)$. Sviluppando il secondo membro di questa uguaglianza si vede che $-(a + b + c)$ è il coefficiente del monomio di grado 2, e quindi è nullo. Un'altra via è quella di calcolare direttamente questi numeri che risultano essere uguali a 1, $-1/2 \pm i\sqrt{3}/2$, e la loro somma è nulla.

Esercizio 2 (punti 3). Sia $f : (a, b) \to \mathbf{R}$ continua tale che $\lim_{x \to a^+} f(x) = 5$, $\lim_{x \to b^-} f(x) = -\infty$. Dimostrare che esiste $x \in (a, b)$ tale che $f(x) = 0$.

Poiché f è continua, per la "permanenza del segno", esiste $[c, d] \subset (a, b)$ tale che $f(c) > 0$ e $f(d) < 0$. Per il teorema degli zeri, esiste $x \in (c, d) \subset (a, b)$ tale che $f(x) = 0$.

Esercizio 3 (punti 10). Disegnare il grafico della funzione $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, definita da $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x+1}$.

f è definita su $D = \mathbf{R} \setminus \{-1\}$. $f(x) > 0$ per $x > -1$, $f(x) < 0$ per $x < -1$. La retta $x = -1$ è un asintoto vericale, $\lim_{x\to 1^{\pm}} f(x) = \pm\infty$. La retta $y = x - 1$ è un asintoto obliquo. La funzione ha un punto di minimo locale in $x = -1 + \sqrt{2}$ e un punto di massimo locale in $x = -1 - \sqrt{2}$. In ultima analisi il grafico di f è un'iperbole con quegli asintoti contenuta nella zona del piano in cui $(x+1)(y - (x-1)) > 0$.

Esercizio 4 (punti 8). Si consideri l'equazione differenziale definita su $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$:

$$y't = y^2 - 3y + 2$$

a Esistono soluzioni costanti?

b Si determini la soluzione tale che $y(1) = \dfrac{1}{2}$ e se ne descriva la corrispondente curva integrale in $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$

a $\boxed{\text{x}}$ Si esistono ☐No non esistono

Una soluzione costante è tale che $y' = 0$. Pertanto le soluzioni costanti sono $y = 1$ e $y = 2$ cioè le radici del polinomio $y^2 - 3y + 2$.

b

Eliminate le due curve integrali orizzontali $y = 1$ e $y = 2$, sul complementare si tratta di studiare l'equazione a variabili separate $y' = \dfrac{y^2-3y+2}{t}$. La forma implicita delle soluzioni è $\log(|\dfrac{y-2}{y-1}|) = \log(|t|) + c,\ c \in \mathbf{R}$. La curva integrale che passa per $(1, 1/2)$ è contenuta nel semipiano $y < 1$. Dunque è della forma implicita $\log(\dfrac{y-2}{y-1}) = \log(t) + c$ cioè $\dfrac{y-2}{y-1} = tC$. Per determinare C, imponiamo $y(1) = 1/2$ e otteniamo infine $C = 3$.