

Analisi I - IngBM - 2013-14
COMPITO B 1 Febbraio 2014

COGNOME NOME
MATRICOLA VALUTAZIONE + =

Istruzioni

Il compito è composto di due parti.

La prima parte deve essere svolta preliminarmente. Essa verrà corretta per prima e valutata con un punteggio di $0 \leq x \leq 10$ punti.

Condizione necessaria affinché venga preso in considerazione l'eventuale svolgimento della seconda parte è che $x \geq 6$.

In tal caso la seconda parte viene valutata con un punteggio di $0 \leq y \leq 24$ punti.

Il compito sarà sufficiente per l'ammissione alla prova orale se $x + y \geq 19$. In tal caso il voto di ammissione all'orale sarà $v/30$, dove $v = \min(28, x + y)$.

1. PRIMA PARTE

Esercizio 0 (punti 0). Leggere e capire le istruzioni.

Esercizio 1 (punti 3-4). Calcolare il limite

$$L = \lim_{x \rightarrow 0} \log\left(\frac{e^{2x} - 1}{2x}\right)$$

$L = 0$. Infatti facendo la sostituzione $y = 2x$, abbiamo $\lim_{y \rightarrow 0} \log\left(\frac{e^y - 1}{y}\right) = \log(1) = 0$ dove dentro la parentesi abbiamo usato un limite notevole.

Esercizio 2 (3 punti).

- a Determinare il più grande sottoinsieme D di \mathbf{R} tale che la formula $f(x) = e^{\sqrt{\cos(x)-1}}$ definisca una funzione $f : D \rightarrow \mathbf{R}$.
- b Determinare la parte interna $\overset{\circ}{D}$ di D .
- c Dire se l'insieme D è limitato superiormente o no; se lo è calcolarne l'estremo superiore mentre se non lo è dire se la funzione $f : D \rightarrow \mathbf{R}$ ammette limite per $x \in D$, $x \rightarrow +\infty$ e, nel caso, calcolarlo.

a $D = \{2n\pi \mid n \in \mathbf{Z}\}$. Infatti $x \in D$ se e solo se $\cos(x) - 1 \geq 0$ e in tal caso $\cos(x) = 1$.

b $\overset{\circ}{D} = \emptyset$. Infatti per ogni $x \in D$, $\epsilon > 0$, l'intervallo $I = (x - \epsilon, x + \epsilon)$ non è contenuto in D ; infatti $I \cap D$ è finito.

c SI l'insieme D è limitato superiormente e il suo

estremo superiore è

NO L'insieme D non è limitato superiormente; infatti per ogni $M \in \mathbf{R}$ esiste $n \in \mathbf{N}$, $n > 0$ abbastanza grande tale che $n > M/2\pi$.

NO $\lim_{x \in D, x \rightarrow +\infty} f(x)$ non esiste

SI $\lim_{x \in D, x \rightarrow +\infty} f(x)$ esiste e vale .

Infatti la funzione $f : D \rightarrow \mathbf{R}$, $f(2n\pi) = e^{\sqrt{0}} = 1$, è costante uguale a 1

Esercizio 3 (3 punti). Dimostrare che per ogni $n \in \mathbf{N}$ $\int_{-1}^1 x^{2n+1} \cos(x) dx = 0$.

Osserviamo che la funzione $f(x) = x^{2n+1} \cos(x)$ definita su tutto \mathbf{R} è dispari, cioè $f(-x) = -f(x)$. Poiché l'intervallo di integrazione $[-1, 1]$ è simmetrico rispetto a 0, segue che l'integrale definito è nullo.

Esercizio 4 (1 punto). Dire se la seguente affermazione è vera o falsa:

Sia $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ continua. Sia $x \in \mathbf{R}$ un punto di minimo locale per f . Allora f è derivabile in x e $f'(x) = 0$.

Vera

Falsa

perché f non è necessariamente derivabile in un punto di minimo locale. Si consideri per esempio $f(x) = |x|$, dove 0 è un punto di minimo.

2. SECONDA PARTE

Esercizio 1 (punti 3). Siano a, b, c, d quattro numeri complessi distinti tali che

$$a^4 = b^4 = c^4 = d^4 = 1$$

è vero che $a + b + c + d = 0$?

Vero

Falso

perché i numeri a, b, c, d sono le radici complesse distinte del polinomio $x^4 - 1 = (x - a)(x - b)(x - c)(x - d)$. Sviluppando il secondo membro di questa uguaglianza si vede che $-(a + b + c + d)$ è il coefficiente del monomio di grado 3, e quindi è nullo. Un'altra via è quella di calcolare direttamente questi numeri che risultano essere uguali a $\pm 1, \pm i$, e la loro somma è nulla.

Esercizio 2 (punti 3). Sia $f : (a, b) \rightarrow \mathbf{R}$ continua tale che $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -2$, $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = \infty$. Dimostrare che esiste $x \in (a, b)$ tale che $f(x) = 0$.

Poiché f è continua, per la "permanenza del segno", esiste $[c, d] \subset (a, b)$ tale che $f(c) < 0$ e $f(d) > 0$. Per il teorema degli zeri, esiste $x \in (c, d) \subset (a, b)$ tale che $f(x) = 0$.

Esercizio 3 (punti 10). Disegnare il grafico della funzione $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, definita da $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x - 1}$.

f è definita su $D = \mathbf{R} \setminus \{1\}$. $f(x) > 0$ per $x > 1$, $f(x) < 0$ per $x < 1$. La retta $x = 1$ è un asintoto verticale, $\lim_{x \rightarrow 1^\pm} f(x) = \pm\infty$. La retta $y = x + 1$ è un asintoto obliquo. La funzione ha un punto di minimo locale in $x = 1 + \sqrt{2}$ e un punto di massimo locale in $x = 1 - \sqrt{2}$. In ultima analisi il grafico di f è un'iperbole con quegli asintoti contenuta nella zona del piano in cui $(x - 1)(y - (x + 1)) > 0$.

Esercizio 4 (punti 8). Si consideri l'equazione differenziale definita su $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$:

$$y't = y^2 - 4y + 3$$

- (1) Esistono soluzioni costanti?
- (2) Si determini la soluzione tale che $y(1) = \frac{1}{2}$ e se ne descriva la corrispondente curva integrale in $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$

a Si esistono No non esistono
 Una soluzione costante è tale che $y' = 0$. Pertanto le soluzioni costanti sono $y = 1$ e $y = 3$ cioè le radici del polinomio $y^2 - 4y + 3$.
 b

Eliminate le due curve integrali orizzontali $y = 1$ e $y = 3$, sul complementare si tratta di studiare l'equazione a variabili separate $y' = \frac{y^2 - 4y + 3}{t}$. La forma implicita delle soluzioni è $\log\left|\frac{y-3}{y-1}\right| = \log(t^2) + c$, $c \in \mathbf{R}$. La curva integrale che passa per $(1, 1/2)$ è contenuta nel semipiano $y < 1$. Dunque è della forma implicita $\log\left(\frac{y-3}{y-1}\right) = \log(t^2) + c$ cioè $\frac{y-3}{y-1} = t^2 C$. Per determinare C , imponiamo $y(1) = 1/2$ e otteniamo infine $C = 5$.