Analisi I - IngBM - 2015-16
COMPITO A 6 luglio 2016

COGNOME .... NOME ....

MATRICOLA .... VALUTAZIONE ..... + ... = ...

1. Istruzioni

Gli esercizi devono essere svolti negli appositi spazi del presente fascicolo; **solo questo sarà ritirato e valutato.** *I fogli a quadretti messi a disposizione possono essere usati liberamente ma in nessun caso saranno ritirati. Il compito è composto di due parti. La prima parte deve essere svolta preliminarmente. Essa verrà corretta per prima e valutata con un punteggio di* $0 \leq x \leq 10$ *punti. Condizione necessaria affinché venga preso in considerazione l'eventuale svolgimento della seconda parte è che* $x \geq 6$. *In tal caso la seconda parte viene valutata con un punteggio di* $0 \leq y \leq 24$ *punti. Il compito sarà sufficiente per l'ammissione alla prova orale se* $x + y \geq 18$. *In tal caso il voto di ammissione all'orale sarà* $v = \min(28, x + y)$.
Attenzione. Tutte le risposte devono essere giustificate.

Esercizio 0. (0 punti) Leggere e capire le istruzioni.

Esercizio 1.(3,5 punti) Calcolare, se esiste, il seguente limite

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{n!}{n^n}\right)^{\frac{n^n}{n!}}$$

SOLUZIONE.

☐ NO il limite non esiste $\qquad$ ☒ SI il limite esiste e vale e

perché $\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{n!}{n^n}\right)^{\frac{n^n}{n!}} = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{n^n}{n!}}\right)^{\frac{n^n}{n!}}$ e poiché $\lim_{n\to+\infty}\frac{n^n}{n!} = +\infty$ (cfr. dispensa LIMSUCC pag. 4) si ha (cfr. dispensa LIMSUCC pag.9)

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{n!}{n^n}\right)^{\frac{n^n}{n!}} = e$$

Esercizio 2.(3 punti.) Si consideri la funzione $g(t) = |t-1| + |t-2|$
Si chiede di descrivere

(1) Il sottoinsieme D di $\mathbf{R}$ dove $g(t)$ è derivabile
(2) Il sottoinsieme E di $\mathbf{R}$ dove la funzione integrale $f(x) = \displaystyle\int_0^x g(t)dt$ è derivabile.

SOLUZIONE.

(1) $D = \mathbf{R} \setminus \{1, 2\}$
perché in tutti i punti diversi da 1 e 2 la funzione è una funzione elementare del tipo $at + b$ e in quei due punti non esiste il limite del rapporto incrementale poiché il limite destro è diverso da quello sinistro. In particolare la funzione può essere descritta anche come

$$g(t) = \begin{cases} 3 - 2t & \text{per } t \leq 1 \\ 1 & \text{per } 1 \leq t \leq 2 \\ 2t - 3 & \text{per } 2 \leq t \end{cases}$$

e questo permette facilmente di vedere che nel punto 1 il limite sinistro del rapporto incrementale è -2 e quello destro 0 e nel punto 2 i due limiti valgono rispettivamente 0 e 2.

(2) $E = \mathbf{R}$
perché la funzione $g(t)$ è in ogni punto la derivata della funzione $f(x)$.

Esercizio 3.(3,5 punti) Provare per induzione che se n è un numero naturale allora $1 + n + n^2$ è dispari.

SOLUZIONE.
Per $n = 0$ o 1 la cosa è evidente. Supponiamo ora che la proposizione sia vera per n e mostriamo che ció implica che è vera per $n + 1$.
Osserviamo che $1 + (n + 1) + (n + 1)^2 = 1 + n + n^2 + 2n + 2$. Ma $1 + n + n^2$ è dispari per ipotesi induttiva e quindi $1 + n + n^2 + 2n + 2$ è dispari essendo somma di un dispari $(1 + n + n^2)$ e di un pari $(2(n + 1))$.

Seconda parte

Esercizio 1. (6 punti) Sia $g(t)$ una funzione continua da $\mathbf{R}$ a $\mathbf{R}$. Si consideri la funzione integrale

$$f(x) = \int_0^x e^{g(t)} dt$$

(1) Dimostrare che la funzione $f(x)$ è iniettiva.
(2) Detta B l'immagine della funzione f, dimostrare che esiste una funzione $\Phi : B \to \mathbf{R}$ tale che $\Phi \circ f = id$.
(3) Dimostrare che la Φ è differenziabile.

SOLUZIONE.

(1) La funzione $f(x)$ è una funzione la cui derivata è una funzione sempre strettamente positiva, quindi è una funzione monotona crescente e pertanto iniettiva.
(2) Essendo $f(x)$ iniettiva risulta biunivoca sull'immagine B e pertanto invertibile. Basta osservare che per ogni $b \in B$ esiste un solo $a \in \mathbf{R}$ tale che $f(a) = b$ e porre $\Phi(b) = a$.
(3) La funzione Φ è differenziabile nei punti ove la derivata della funzione $f(x)$ non si annulla, ma essendo tale derivata $e^{g(x)}$ essa è non nulla in tutto il dominio di definizione.

Esercizio 2. (6 punti) Siano m, n due interi non nulli fissati e al variare delle costanti A, B arbitrarie sia $f_{A,B}$ la funzione

$$f_{A,B} = (A \sin nx + B \cos nx)e^{mx}.$$

(1) Dire se si possono scegliere A e B in modo tale che la funzione $f_{A,B}$ sia la primitiva della funzione $e^{mx} \sin nx$

(2) Siano α e β due numeri reali fissati. Dire sotto quali condizioni esistono A e B in modo tale che la funzione $f_{A,B}$ sia la primitiva della funzione $e^{mx}(\alpha \sin nx + \beta \cos nx)$.

SOLUZIONE.

(1) Richiedere che la funzione $f_{A,B}$ sia la primitiva di $e^{mx} \sin nx$ equivale a richiedere che $\frac{d}{dx} f_{A,B} = e^{mx} \sin nx$. Eseguendo i calcoli si ha

$$\frac{d}{dx} f_{A,B} = ((mA - nB) \sin nx + (nA + mB) \cos nx)e^{mx}$$

e imponendo che questa sia $e^{mx} \sin nx$ otteniamo

$$\begin{cases} mA - nB = 1 \\ nA + mB = 0 \end{cases}$$

Tale sistema, poiché $m^2 + n^2 \neq 0$ ha soluzione $A = \frac{m}{m^2 + n^2}, B = \frac{-n}{m^2 + n^2}$

(2) Ragionando come al punto precedente si perviene al sistema

$$\begin{cases} mA - nB = \alpha \\ nA + mB = \beta \end{cases}$$

che, essendo il suo determinante $\neq 0$ ha soluzione

$$A = \frac{m\alpha + n\beta}{m^2 + n^2}, B = \frac{-n\alpha + m\beta}{m^2 + n^2}$$

Esercizio 3. (6 punti) Descrivere l'insieme delle soluzioni dell'equazione

$$e^{|z|^2-z^2} = i$$

SOLUZIONE.
L'insieme delle soluzioni è l'insieme vuoto. Ponendo $z = a+ib$ otteniamo che $|z|^2 - z^2 = a^2+b^2-(a^2-b^2+2abi) = 2b^2-2abi$. Pertanto

$$e^{|z|^2-z^2} = e^{2b^2}(\cos(-2ab)+i\sin(-2ab)) = i.$$

Il fatto che i ha modulo 1, implica che $b=0$ e quindi che il numero complesso $e^{|z|^2-z^2}$ è del tipo $1+i0$. Pertanto l'equazione proposta non ha soluzioni.

Esercizio 4.(6 punti) Trovare le soluzioni dell'equazione differenziale

$$y\text{"} - 6y' + 8y = e^{3t}$$

che verificano $y(0) = 1$

SOLUZIONE. Si vede immediatamente che l'equazione caratteristica ha soluzioni 2 e 4, pertanto la soluzione generale dell'equazione omogenea è del tipo $C_1e^{2t}+C_2e^{4t}$.
Cerchiamo una soluzione particolare del tipo ae^{3t}. Otteniamo

$$(9a-18a+8a)e^{3t} = e^{3t}$$

da cui $a=-1$.
Quindi la soluzione generale è del tipo

$$C_1e^{2t}+C_2e^{4t}-e^{3t}.$$

Imponendo la condizione richiesta otteniamo

$$C_1+C_2-1=1.$$

Quindi le soluzioni del problema proposto sono tutte le funzioni del tipo

$$Ce^{2t}+(2-C)e^{4t}-e^{3t}$$

al variare della costante reale C.