April 16, 2014

SUL GRUPPO FONDAMENTALE E IL RIVESTIMENTO UNIVERSALE

1. Introduzione

Lavoreremo con spazi topologici M connessi per archi e muniti di un punto base x_0 (saranno detti spazi puntati). Sarà sottinteso che tutte le applicazioni saranno continue, eventualmente puntate, cioè che mandano punti base in punti base. Per gli scopi del corso, possiamo in buona parte restringerci al caso in cui gli spazi M sono varietà lisce e le applicazioni possono essere considerate "lisce a pezzi". Ci limiteremo ad illustrare le definizioni, le costruzioni e gli enunciati principali, essenzialmente senza dimostrazioni. Il lettore interessato ad approfondire la materia può per esempio guardare nella collana sulla geometria di Dubroniv-Novikov-Fomenko, il (primo capitolo del) libro [A. Hatcher "Algebraic Topology"] scaricabile liberamente dalla home-page dell'autore (http://www.math.cornell.edu/ hatcher/), il (primo capitolo del) libro [M.J. Greenberg "Lectures on algebraic topology"] che è utilmente conciso.

2. Il gruppo fondamentale

Fissiamo un punto base $x_0 \in M$.

$$\Omega(M, x_0) = \{f : [0,1] \to M;\ f(0) = f(1) = x_0\}$$

è l'insieme dei *lacci puntati in M*.

$$\Omega(M, x_0) \subset \mathcal{P}(M, x_0) = \{f : [0,1] \to M;\ f(0) = x_0\}$$

l'insieme dei *cammini puntati*,

$$\mathcal{P}(M, x_0) \subset \mathcal{P}(M) = \{f : [0,1] \to M\}$$

l'insieme dei *cammini in M* senza restrizioni. $\mathcal{P}(M)$ è munito della topologia *compatto/aperto*; una base di aperti di questa topologia è data dagli insiemi della forma

$$A(K, U) = \{f \in \mathcal{P};\ f(K) \subset U\}$$

dove K varia tra i sottospazi compatti di $I = [0,1]$ (cioè i sottointervalli chiusi di I) e U varia tra gli aperti di M. Se M è metrizzabile per mezzo di una distanza d (per esempio d indotta da una metrica Riemanniana sulla varietà M), allora anche $\mathcal{P}$ è metrizzabile mediante la distanza

$$\delta(f, g) = \sup_{x \in I} d(f(x), g(x)) \ .$$

Gli insiemi $\Omega(M, x_0)$ e $\mathcal{P}(M, x_0)$ sono muniti della topologia di sottospazio di $\mathcal{P}$.

Se $f, g \in \mathcal{P}$ e $f(1) = g(0)$ possiamo *concatenare* i due cammini, ottenendo un nuovo cammino $fg \in \mathcal{P}$ che vale $fg(t) = f(2t)$ su $[0, 1/2]$, $fg(t) = g(2t-1)$ su $[1/2, 1]$. La concatenazione definisce una operazione sullo spazio dei lacci $\Omega(M, x_0)$. Dato $f \in \mathcal{P}$, indichiamo con $\bar{f} \in \mathcal{P}$ il cammino tale che $\bar{f}(t) = f(1-t)$. Se f è un laccio anche $\bar{f}$ lo è.

L'insieme delle componenti connesse per archi di $\Omega(M, x_0)$ è denotato con $\pi_1(M, x_0)$. Due lacci α e β stanno nella stessa componente se e solo se sono *omotopi* per mezzo di un'omotopia puntata, cioè un'applicazione

$$H : I \times I \to M$$

tale che, posto per ogni $s \in I$, $h_s = H| : I \times \{s\} \to M$, si ha che per ogni s, $h_s \in \Omega(M, x_0)$, $h_0 = \alpha$, $h_1 = \beta$. Indichiamo con $[\alpha] \in \pi_1(M, x_0)$ la componente, cioè la classe di omotopia puntata, del laccio α. Vale la seguente proposizione.

Proposizione 2.1. *La concatenazione discende su $\pi_1(M, x_0)$ e lo rende un gruppo. Precisamente, ponendo*

$$[\alpha][\beta] := [\alpha\beta]$$

è ben definita un' operazione su $\pi_1(M, x_0)$ che lo rende un gruppo definito il gruppo fondamentale di (M, x_0). *L'elemento neutro è $[c]$, dove $c : I \to M$, $c(t) = x_0$ per ogni $t \in I$. Per ogni $[\alpha]$, $[\alpha]^{-1} = [\bar{\alpha}]$.*

C'è un modo equivalente, spesso utile, di pensare $\Omega(M, x_0)$ e $\pi_1(M, x_0)$. Consideriamo

$$S^1 := \{z \in \mathbb{C};\ |z| = 1\}$$

con punto base $p = 1$. Allora

$$\epsilon : I \to S^1,\ \epsilon(x) = e^{2\pi i x}$$

appartiene a $\Omega(S^1, p)$. Per ogni $\alpha \in \Omega(M, x_0)$, esiste un' unica applicazione puntata

$$\alpha' : (S^1, p) \to (M, x_0)$$

tale che

$$\alpha = \alpha' \circ \epsilon$$

Analogamente ogni omotopia puntata h_s tra α e β si fattorizza tramite un' unica omotopia puntata h'_s tra α' e β'. In questo modo possiamo tradurre tutte le costruzioni fatte prima usando le classi $[\alpha]$ in termini delle classi $[\alpha']$. Useremo indifferentemente i due punti di vista.

2.1. **Proprietà functoriale del gruppo fondamentale.** Vale la seguente

Proposizione 2.2. *Per ogni applicazione puntata $f : (M, x_0) \to (N, y_0)$, ponendo per ogni $[\alpha] \in \pi_1(M, x_0)$,*

$$f_*([\alpha]) = [\alpha \circ f]$$

è ben definito un omomorfismo di gruppi, detto omomorfismo indotto da f

$$f_* : \pi_1(M, x_0) \to \pi_1(N, y_0)\ .$$

La corrispondenza $f \to f_*$ verifica le seguenti proprietà:

- Per ogni composizione di applicazioni puntate si ha che
$$(f \circ g)_* = f_* \circ g_*$$
- $(id_{(M,x_0)})_* = id_{\pi_1(M,x_0)}$.
- Ne segue che se f è un omeomorfismo puntato, allora f_* è un isomorfismo di gruppi.

Queste proprietà si riassumono dicendo che la corrispondenza $f \to f_*$ realizza un *functore covariante dalla categoria degli spazi e applicazioni puntati, nella categoria dei gruppi e omeomorfismi di gruppi.*

2.2. **Dipendenza dal punto base.** Vale la seguente

Proposizione 2.3. *Sia $x_1 \in M$. Fissiamo $\beta \in \mathcal{P}$ tale che $\beta(0) = x_0$, $\beta(1) = x_1$ (esiste perché M è connesso per archi). Ponendo per ogni $[\alpha] \in \pi_1(M, x_0)$*

$$\phi_\beta([\alpha]) = [\bar{\beta}\alpha\beta]$$

è ben definito un isomorfismo di gruppi

$$\phi_\beta : \pi_1(M, x_0) \to \pi_1(M, x_1)\ .$$

Alcune osservazioni:

(1) $\phi_\beta = \phi_{<\beta>}$ dipende solo dalla classe di omotopia a estremi fissi $< \beta >$, dove $\gamma \in < \beta >$ se e solo se esiste un'omotopia h_s tra β e γ tale che per ogni $s \in I$, $h_s(0) = x_0$ e $h_s(1) = x_1$.

(2) Nel caso particolare in cui $x_0 = x_1$, $< \beta >= [\beta] \in \pi_1(M, x_0)$ e per ogni $[\alpha] \in \pi_1(M, x_0)$
$$\phi_{[\beta]}([\alpha]) = [\beta]^{-1}][\alpha][\beta]$$
cioè $\phi_{[\beta]}$ è, per definizione, un *automorfismo interno* del gruppo fondamentale.

(3) Combinando la fuctorialità con la proposizione precedente si vede che la classe di isomorfismo $\pi_1(M)$ del gruppo fondamentale è un invariante topologico di M (senza punto base).

(4) Se $\pi_1(M) = 0$, M è detto *semplicemente connesso.*

2.3. **Esempi fondamentali.** Valgono i seguenti fatti.

Proposizione 2.4. *Il gruppo fondamentale $\pi_1(S^1, p) \simeq (\mathbb{Z}, +)$ ed è generato da $[\epsilon]$, dove il laccio ϵ è stato definito in precedenza; si noti che $\epsilon' = id_{(S^1,p)}$.*

Proposizione 2.5. $\pi_1(M \times N, (x_0, y_0)) \simeq \pi_1(M, x_0) \times \pi_1(N, y_0)$.

Per esempio $\pi_1((S^1)^n) \simeq \mathbb{Z}^n$.

Sia $(A, x_0) \subset (M, x_0)$ un sottospazio puntato di (M, x_0), cioè A è connesso per archi e $x_0 \in A$. Una *retrazione* $r : M \to A$ per definizione è tale che $r|A = id_A$. Una *retrazione di deformazione* è per definizione una retrazione $r : M \to A$ per cui esiste un'omotopia $H : M \times I \to M$ tale che per ogni $s \in I$, $h_s|A = id_A$, $h_0 = id_M$, $h_1 = r$. Diciamo che (M, x_0) è *contraibile* se esiste una retrazione di deformazione $r : M \to \{x_0\}$. Per esempio un disco puntato (D^n, x_0) è contraibile. Allora vale

Proposizione 2.6. *Se $r : M \to A$ è una retrazione di deformazione, allora $r_* : \pi_1(M, x_0) \to (A, x_0)$ è un isomorfismo di gruppi. In particolare se (M, x_0) è contraibile, allora $\pi_1(M, x_0) = 0$.*

2.4. **Presentazioni.** In generale è difficile calcolare e confrontare i gruppi fondamentali di spazi diversi. In certi casi è almeno possibile trovarne presentazioni (finite).

Cominciamo richiamando alcune generalità sulle presentazioni dei gruppi. Un sottogruppo H di un gruppo G è detto *normale* se per ogni $g \in G$, per ogni $h \in H$, $ghg^{-1} \in H$. In altre parole, H è *invariante per ogni automorfismo interno di* G. H induce la relazione di equivalenza su G per cui $g' \sim_H g$ se e solo se $g'g^{-1} \in H$. L'insieme quoziente è denotato G/H. Ponendo per ogni $[g], [g'] \in G/N$, $[g][g'] = [gg']$, si verifica facilmente che se H è normale, è ben definta un'operazione su G/H che lo rende un gruppo (detto *gruppo quoziente*). La proiezione sul quoziente $\pi(g) = [g]$ è allora tautologicamente un omomorfismo di gruppi, $\pi(H) = [1]$ è l'elemento neutro di G/H, $H = \mathrm{Ker}(\pi)$; per ogni $[g]$, $[g]^{-1} = [g^{-1}]$. D'altra parte, se $\phi : G \to G'$ è un omomorfismo di gruppi, allora $\mathrm{Im}(\phi)$ è un sottogruppo di G', $H := \mathrm{Ker}(\phi)$ è un sottogruppo normale di G, ϕ si fattorizza tramite un isomorfismo $\tilde{\phi} : G/H \to \mathrm{Im}(\phi)$. $H := G$ è banalmente un sottogruppo normale di G stesso. Dato un sottoinsieme non vuoto X di G, $N(X)$ denota l'intersezione di tutti i sottogruppi normali di G che contengono X. Risulta che $N(X)$ è un sottogruppo normale di G, che è detto *generato da* X.

Un *alfabeto* è un insieme $\mathcal{A}$ (di "lettere"). Ogni alfabeto può essere simmetrizzato definendo formalmente l'insieme dei simboli $\mathcal{A}^{-1} := \{a^{-1};\ a \in \mathcal{A}\}$. Poniamo

$$\mathcal{G} = \mathcal{A} \cup \mathcal{A}^{-1} \ .$$

L'insieme $\mathcal{G}$ è munito della involuzione senza punti fissi $inv : \mathcal{G} \to \mathcal{G}$, $inv(a) := a^{-1}$ $inv(a^{-1}) := a$, per ogni $a \in \mathcal{A}$, per cui formalmente $(g^{-1})^{-1} = g$ per ogni $g \in \mathcal{G}$. Una *parola* nell'alfabeto $\mathcal{A}$ è una stringa finita e ordinata di lettere di $\mathcal{G}$ della forma

$$w = g_1 g_2 \dots g_k$$

dove l'intero $k \geq 0$ è arbitrario ed è detto la *lunghezza* della parola. La *parola vuota* $\emptyset$ è l'unica parola tale che $k = 0$. Indichiamo con $W(\mathcal{A})$ l'insieme di tutte queste parole. Due parole w_1, w_2 si possono concatenare in successione dando luogo alla nuova parola $w_1 w_2$. Questo definisce un'operazione su $W(\mathcal{A})$. Diciamo che w_2 è ottenuta da w_1 per mezzo di una *modifica elementare* se si ottiene inserendo in oppure eliminando da w_1 una parola a due lettere del tipo gg^{-1}. Due parole sono dette equivalenti se si ottengono l'una dall'altra per mezzo di una successione finita di modifiche elementari. L'insieme quoziente $W(\mathcal{A})/\sim$ è denotato $F(\mathcal{A})$. Si verifica facilmente che la concatenazione di parole discende su $F(\mathcal{A})$, cioè ponendo

$$[w_1][w_2] = [w_1 w_2]$$

è ben definita un'operazione su $F(\mathcal{A})$ e questa lo rende un gruppo detto il *gruppo libero generato da* $\mathcal{A}$. Se $\mathcal{A} = \{a\}$ ha un solo elemento, allora $F(\mathcal{A}) = \mathbb{Z}_a$ è isomorfo a $(\mathbb{Z}, +)$. Se $\mathcal{A}$ ha almeno due elementi, allora $F(\mathcal{A})$ non è commutativo.

Dato un gruppo G e un' applicazione (tra insiemi)

$$f : \mathcal{A} \to G$$

esiste un unico omomorfismo di gruppi

$$\tilde{f} : F(\mathcal{A}) \to G$$

che estende f e tale che $\tilde{f}(a^{-1}) = f(a)^{-1}$, per ogni $a \in \mathcal{A}$. Una presentazione

$$(\mathcal{A} \mid \mathcal{R})$$

di G è data da una applicazione $f : \mathcal{A} \to G$ e da un sottoinsieme $\mathcal{R}$ di $F(\mathcal{A})$ tali che

(1) L'omomorfismo $\tilde{f}$ è surgettivo.
(2) $N(\mathcal{R}) = \mathrm{Ker}(\tilde{f})$.

Ne segue che G è isomorfo a $F(\mathcal{A})/N(\mathcal{R})$. $\mathcal{A}$ è detto l'*insieme dei generatori* della presentazione, $\mathcal{R}$ l'*insieme delle relazioni*. In effetti il sottoinsieme $f(\mathcal{A})$ di G genera G. Per ogni gruppo G, la *presentazione tautologica* si ottiene prendendo $\mathcal{A} := G$, $f = id_G$, $\mathcal{R} = \mathrm{Ker}(\tilde{id_G})$. G si dice *finitamente generato* se ammette una presentazione con $\mathcal{A}$ finito. G si dice *finitamente presentato* se entrambi $\mathcal{A}$ e $\mathcal{R}$ sono insiemi finiti.

Date due presentazioni $(\mathcal{A}_1|\mathcal{R}_1)$ e $(\mathcal{A}_2|\mathcal{R}_2)$ di due gruppi G_1 e G_2 rispettivamente (per esempio le rispettive presentazioni tautologiche), dove è sottinteso che $\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2 = \emptyset$, consideriamo il gruppo $F(\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2)/N(\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2)$. Si dimostra che, a meno di isomorfismi di gruppi, tale gruppo dipende solo da G_1 e G_2, viene indicato come $G_1 * G_2$ e detto il *prodotto libero* dei due gruppi. Per esempio $F(\mathcal{A}) = *_{a\in\mathcal{A}}\mathbb{Z}_a$.

Enunciamo ora una versione semplificata di un *teorema di van Kampen* che in certi casi permette di determinare una presentazione del gruppo fondamentale.

Proposizione 2.7. *Sia $M = U_1 \cup U_2$ espresso come unione di due aperti connessi per archi. Supponiamo che $x_0 \in U_0 := U_1 \cap U_2$ e che anche U_0 sia connesso per archi. Indichiamo con $j_i : (U_0, x_0) \to (U_i, x_0)$, $i = 1, 2$, le due inclusioni puntate. Per ogni $\alpha \in \pi_1(U_0, x_0)$, $(j_{1,*}(\alpha))^{-1} j_{2,*}(\alpha)$ è un elemento del prodotto libero $\pi_1(U_1, x_0) * \pi_1(U_2, x_0)$. Indichiamo con $J_1^{-1}J_2$ il sottoinsieme di $\pi_1(U_1, x_0) * \pi_1(U_2, x_0)$ formato dagli elementi di questo tipo, al variare di α. Allora $\pi_1(M, x_0)$ è isomorfo al gruppo quoziente $\pi_1(U_1, x_0) * \pi_1(U_2, x_0)/N(J_1^{-1}J_2)$.*

Alcuni esempi.

- Un *bouquet di S^1 con k-petali* $\wedge_k S^1$ si ottiene identificando ad un punto i punti base di k-copie disgiunte di (S^1, p). Applicando ripetutamente van Kampen, si dimostra per induzione su k che $\pi_1(\wedge_k S^1) = *_k\mathbb{Z}$, cioè il prodotto libero di k copie di $\mathbb{Z}$, equivalentemente il gruppo libero generato da un alfabeto con k elementi.
- Ogni superficie T_g ottenuta come somma connessa di $g \geq 1$ copie di del toro T^2 si può ottenere incollando in modo opportuno i lati di un $4g$-gono. Se ne deduce che T_g ammette un ricoprimento formato da due aperti U_1, U_2, tali che:
  (1) U_1 è un 2-disco aperto.
  (2) U_2 ammette una retrazione di deformazione su un bouquet di S^1 con $2g$ petali.
  (3) $U_0 = U_1 \cap U_2$ è un anello che ammette quindi una retrazione di deformazione su una copia di S^1.

  Applicando van Kampem si realizza che si possono organizzare i generatori del gruppo fondamentale di U_2 in due pacchetti $\{a_1, \dots a_g\}$, $\{b_1, \dots, b_g\}$, in modo tale che $\pi_1(T_g)$ ammette una presentazione con $2g$ generatori e una sola relazione della forma

  $$(\{a_i, b_i\} \mid a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \dots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1}) .$$
- Anche senza fare ricorso alla classificazione delle superfici, si può dimostrare usando ripetutamente van Kampen che il π_1 di una superficie chiusa S è finitamente presentato (suggerimento: si fissa una triangolazione T di S; rimuovendo dall'interno di ogni triangolo un piccolo disco aperto si ottiene una superficie S' con bordo che ammette una retrazione di deformazione sul grafo $T^{(1)}$ formato dai lati di T; collassando ad un punto un albero massimale di $T^{(1)}$, si

ottiene un bouquet di S^1 con un numero finito di petali, sia Γ, contenuto nell'interno di S' su cui S' continua a retrarsi; reintroducendo un disco alla volta in modo da ottenere alla fine S e applicando ad ogni passo van Kampen, si realizza alla fine che $\pi_1(S)$ ha una presentazione finita.

2.5. **Relazione con il bordismo non orientato.** Un ingrediente della classificazione delle superfici compatte e chiuse S è stato il gruppo di cobordismo non orientato $B_1(S)$. Ricordiamo che $B_1(S)$ è l'insieme delle classi di cobordismo $[f : M \to S^1]$, dove M è una 1-varietà compatta chiusa (cioè M è l'unione di un numero finito di componenti ciascuna diffeomorfa a S^1), e due applicazioni $f_0 : M_0 \to S$, $f_1 : M_1 \to S$ sono cobordanti se esiste una applicazione $F : W \to S$, dove W è una superficie compatta con bordo $\partial W = M_0 \cup M_1$ e $F|M_i = f_i$. L'operazione di gruppo (commutativo) è indotta dall'unione disgiunta. L'elemento neutro è la classe dell'applicazione vuota. Ogni elemento di $B_1(S)$ è l'inverso di se stesso (basta prendere $W = M \times I$, $F(x,t) = f(x)$ per ogni $x \in M$). Quindi $B_1(S)$ è in modo naturale un $\mathbb{Z}/2$-spazio vettoriale. Fissiamo ora un punto base $x_0 \in S$. Vale:

Proposizione 2.8. *Ponendo $\phi([f : (S^1, p) \to (S, x_0)]) = [f : S^1 \to S]$ (in pratica dimentichiamo sia l'orientazione di S^1 sia i punti base) è ben definito un omomorfismo surgettivo*

$$\phi : \pi_1(S, x_0) \to B_1(S) \ .$$

Poiché $\pi_1(S, x_0)$ è finitamente generato, ne segue che $B_1(S)$ è uno $\mathbb{Z}/2$-spazio vettoriale di *dimensione finita* (fatto che è stato usato nella classificazione delle superfici).

3. Il rivestimento "universale" di una varietà

Da ora in poi M sarà una n-varietà connessa per archi con punto base x_0. Consideriamo $\mathcal{P}(M, x_0) = \{f : [0,1] \to M;\ f(0) = x_0\}$ l'insieme dei *cammini puntati* in M. Due cammini α, β sono considerati equivalenti se $\alpha(1) = \beta(1) = x_1$ e sono connessi da una omotopia h_s ad estremi fissi. Indichiamo con $\tilde{M}(x_0)$ l'insieme quoziente, $< \alpha >$ indicherà la classe di equivalenza del cammino α. E' definita la proiezione

$$p : \tilde{M}(x_0) \to M,\ p(< \alpha >) = \alpha(1) \ .$$

Per ogni $x \in M$, $p^{-1}(x)$ è detta la *fibra di p sopra x*; nella fibra $p^{-1}(x_0)$ cè il punto privilegiato $< c >$, dove c è il cammino costante. Vogliamo munire $\tilde{M}(x_0)$ di una struttura di n-varietà tale che $\tilde{M}(x_0)$ e la proiezione p risulteranno avere le seguenti notevoli proprietà:

(1) $\tilde{M}(x_0)$ è connesso per archi.
(2) $\pi_1(\tilde{M}(x_0), < c >) = 0$, cioè $\tilde{M}(x_0)$ è semplicemente connesso.
(3) Esiste un atlante $\{U_i, \phi_i)\}$ di M tale che:
  (i) Per ogni $x \in M$ l'unione degli U_i che contengono x è un sistema fondamentale di intorni di x in M;
  (ii) Per ogni U_i, $p^{-1}(U_i)$ è un' unione di aperti *disgiunti* $V_{i,j}$ di $\tilde{M}(x_0)$.
  (iii) Per ogni $V_{i,j}$, $p|V_{i,j}$ è un omeomorfismo.
  (iv) Per ogni $< \alpha > \in M(x_0)$, l'unione degli $V_{i,j}$ che contengono $< \alpha >$ formano un sistema fondamentale di intorni di $< \alpha >$ in $M(x_0)$.
  (v) La famiglia $\{V_{i,j}, \phi_i \circ p\}$ è un atlante differenziabile di $\tilde{M}(x_0)$. Ne segue in particolare che p è localmente un diffeomorfismo.

Riassumeremo tutte queste proprietà dicendo che

$$p : (\tilde{M}(x_0), < c >) \to (M, x_0)$$

è il *rivestimento universale di M puntato in x_0*. Il termine "universale" allude ad un ruolo speciale giocato da questo rivestimento nell'ambito della teoria generale dei rivestimenti di M, teoria che qui non svilupperemo. Una conseguenza immediata di queste proprietà è che M si identifica in modo canonico con il *quoziente topologico* $\tilde{M}(x_0)/p$. Spieghiamo questa affermazione. L'applicazione p definisce la relazione di equivalenza su $\tilde{M}(x_0)$ per cui $x \sim_p y$ se e solo se $p(x) = p(y)$. Poiché p è surgettiva, se

$$\pi : \tilde{M}(x_0) \to \tilde{M}(x_0)/p$$

è la proiezione sull'insieme quoziente e poniamo

$$\bar{p} : M(x_0)/p \to M,\ \bar{p}([x]) = p(x)$$

allora $\bar{p}$ è bigettiva e $p = \bar{p} \circ \pi$. Poniamo su $\tilde{M}(x_0)/p$ la topologia (detta *topologia quoziente*) per cui $A \subset \tilde{M}(x_0)/p$ è un aperto se e solo se $\pi^{-1}(A)$ è aperto in $\tilde{M}(x_0)$ (in altre parole si tratta della topologia più fine, cioè con la famiglia di aperti più grande, tale che π è continua). Allora risulta che $\bar{p} : M(x_0)/p \to M$ è un omeomorfismo.

Prendiamo allora un atlante $\{U_i, \phi_i)\}$ di M tale che ogni $\phi(U_i) := W_i$ è una palla aperta di $\mathbb{R}^n$ e supponiamo inoltre che per ogni $x \in M$, l'insieme $\mathcal{U}_x$ degli U_i che contengono x è un sistema fondamentale di intorni di x in M. Per ogni $< \alpha >\in (M, x_0)$, $x = \alpha(1) = p(< \alpha >)$, definiamo intanto un sistema fondamentale di intorni $< \alpha, \mathcal{U}_x >$ nel modo seguente. Per ogni $U \in \mathcal{U}_x$ poniamo

$$< \alpha, U >:= \{< \alpha\beta >;\ \beta : I \to U,\ \beta(0) = x\}\ .$$

Poiché U è una palla, $< \alpha\beta >=< \alpha\beta' >$ se e solo se $\beta(1) = \beta'(1)$, dunque $p| :< \alpha, U >\to U$ è un omeomorfismo. Se $< \alpha_1 >\neq< \alpha_2 >$ e $p(< \alpha_1 >) = p(< \alpha_2 >) = x$, allora per ogni $U \in \mathcal{U}_x$, $< \alpha_1, U > \cap < \alpha_2, U >= \emptyset$. Infatti se esistesse β tale che $< \alpha_1\beta >=< \alpha_2\beta >$, allora $< \alpha_1 >=< \alpha_2 >$. Considerando la famiglia degli $(< \alpha, U >, \phi \circ p)$ abbiamo allora costruito un atlante di (M, x_0) con le proprietà volute. Resta da dimostrare che (M, x_0) è connesso per archi e semplicemente connesso.

3.1. **Sollevamenti.** Sia $\gamma \in \mathcal{P}(M)$ un cammino arbitrario in M, tale che $\gamma(0) = x_1$, $\gamma(1) = x_2$. Un sollevamento $\tilde{\gamma}$ di γ è un cammino $\tilde{\gamma} : I \to \tilde{M}(x_0)$ tale che $\gamma = p \circ \tilde{\gamma}$. Fissiamo $< \alpha >$ tale che $p(< \alpha >) = x_1$. Esiste allora un unico sollevamento $\tilde{\gamma}$ di γ tale che $\tilde{\gamma}(0) =< \alpha >$. Infatti, per ogni $s \in I$, poniamo $\gamma_s(t) = \gamma(st)$ per ogni $t \in I$. Allora per ogni $s \in I$, $\tilde{\gamma}(s) =< \alpha\gamma_s >$. In modo analogo si sollevano in modo unico le omotopie ad estremi fissi. Precisamente, sia h_r, $r \in I$, un'omotopia ad estremi fissi x_1, x_2 tra h_0 e h_1. Sia $< \alpha >$ fissato come prima. Allora esiste un unico sollevamento $\tilde{h}_r$ ad estemi fissi $< \alpha >= \tilde{h}_r(0)$ e $< \alpha >'= \tilde{h}_r(1)$, per ogni $r \in I$.

3.2. **Proprietà di connessione di $\tilde{M}(x_0)$.** Mostriamo che per ogni $< \alpha >$ esiste un arco in $\tilde{M}(x_0)$ che lo connette con $< c >$. Basta prendere l'unico sollevamento $\tilde{\alpha}$ di α tale che $\tilde{\alpha}(0) =< c >$.
Sia $\tau \in \Omega(\tilde{M}(x_0), < c >)$. Consideriamo il laccio $\alpha = p \circ \tau \in \Omega(M, x_0)$. Sia $\tilde{\alpha}$ l'unico sollevamento tale che $\tilde{\alpha}(0) =< c >$. Allora $\tau = \tilde{\alpha}$ e $\tilde{\alpha}(1) =< \tau >= [\tau] =< c >= [c]$. Abbiamo quindi mostrato che $\pi_1(\tilde{M}(x_0), < c >) = 0$.

3.3. **Ancora sollevamenti.** Sia $f : (N, y_0) \to (M, x_0)$ un'applicazione puntata, ci chiediamo se è possibile sollevarla ad una $\tilde{f} : (N, y_0) \to \tilde{M}(x_0)$ tale che $f = p \circ \tilde{f}$. Poiché $f_* = p_* \circ \tilde{f}_*$ e $\tilde{M}(x_0)$ è semplicemente connesso, allora una condizione necessaria è che $f_*([\gamma]) = 1$ per ogni $[\gamma] \in \pi_1(N, y_0)$. Essa è anche sufficiente. Infatti, dato $y \in N$, fissiamo un arco β in N che connette y_0 con y. Solleviamo l'arco $\alpha = f \circ \beta$ nell' arco $\tilde{\alpha}$ in $\tilde{M}(x_0)$ tale che $\tilde{\alpha}(0) =< c >$. Poniamo $\tilde{f}(y) = \tilde{\alpha}(1)$. Nelle nostre ipotesi il risultato non dipende dalla scelta del cammino β. Un'applicazione di questo fatto è che se $\tilde{M}(x_0)$ è contraibile su $< c >$ (per esempio se $\tilde{M}(x_0)$ è diffeomorfo a $\mathbb{R}^n$), allora ogni applicazione puntata $f : (S^m, y_0) \to (M, x_0)$, $m > 1$, è omotopa alla applicazione costante.

3.4. **Cambiamento di punto base.** Vogliamo mettere in relazione $p_j : \tilde{M}(x_j) \to M$ due rivestimenti relativi a due punti base x_j, $j = 0, 1$. Fissiamo un cammino β in M che connette x_1 con x_0. Definiamo

$$f_\beta : \tilde{M}(x_0) \to \tilde{M}(x_1)$$

ponendo

$$f_\beta(< \alpha >) =< \beta\alpha >\ \ .$$

Allora f_β è un diffeomorfismo tale che $p_0 = p_1 \circ f_\beta$; per definizione, è un *isomorfismo di rivestimenti.* Dunque a meno di isomorfismi di rivestimento, il risvestimento universale di M non dipende dalla scelta del punto base.

3.5. **Azione di del gruppo fondamentale sul rivestimento universale.** Premettiamo alcune nozioni generali sull'azione di gruppi su insiemi. Sia X un insieme non vuoto; indichiamo con $S(X)$ il gruppo di tutte le trasformazioni di X, cioè l'insieme della applicazioni biunivoche da X in X munito dell'operazione data dalla composizione. Un sottogruppo di Γ di $S(X)$ è detto un gruppo di trasformazioni di X. Sia G un gruppo. Un' azione ("a sinistra") di G sull'insieme X è un omomorfismo $\rho : G \to S(X)$, l'immagine di ρ è un gruppo di trasformazioni di X. Più precisamente l'azione determinata da ρ è l'applicazione

$$G \times X \to X,\ (g, x) \to \rho(g)(x)$$

a volte ρ è sottointeso e scriviamo $\rho(g)(x) = gx$. Se Γ è un gruppo di trasformazioni di X, esso agisce su X via l'inclusione $\Gamma \to S(X)$. Una azione di G su X è detta *libera* se per ogni $x \in X$, $gx = x$ se e solo se $g = 1$. E' detta *transitiva* se per ogni $x, y \in X$ esiste $g \in G$ tale che $gx = y$. Ogni azione determina la relazione di equivalenza su X per cui $x \sim_\rho y$ se e solo se esiste $g \in G$ tale che $gx = y$, e indichiamo con X/ρ l'insieme quoziente. Nel caso dell'azione di un gruppo di trasformazioni Γ, scriveremo anche X/Γ. Se l'azione è transitiva il quoziente è ridotto ad un punto. Per ogni $x \in X$ la sua classe di equivalenza $[x]_\rho$ è anche detta l'*orbita* di x secondo l'azione. Se X è uno spazio topologico, X/ρ sarà munito della topologia quoziente.

Dati due gruppi, G, G', un *anti-omomorfismo* $\phi : G \to G'$ verifica per definizione la proprietà che $\phi(ab) = \phi(b)\phi(a)$. L'applicazione $inv_G : G \to G,\ g \to g^{-1}$ è un anti-isomorfismo; $\phi : G \to G'$ è un anti-omomorfismo se e solo se $\phi \circ inv_G$ è un omomorfismo, se e solo se $inv_{G'} \circ \phi$ è un omomorfismo. Un anti-omomorfismo $\rho : G \to S(X)$ determina un'azione "a destra" di G su l'insieme X. Ogni azione a destra ha naturalmete associata l'azione a sinistra $\bar{\rho}(g) = \rho(g^{-1})$. Tutte le nozioni relative alle azioni a sinistra si riformulano in termini di azioni a destra.

Riconsideriamo un isomorfismo di rivestimento f_β definito nel paragrafo precedente. In effetti $f_{<\beta>} := f_\beta$ dipende solo dalla classe di omotopia con estremi fissi di β. In particolare se $x_0 = x_1$, β è un laccio puntato e la corrispondenza $[\beta] \to f_{[\beta]}$ definisce un'applicazione

$$\phi : \pi_1(M, x_0) \to \mathrm{Aut}(\tilde{M}(x_0), p)$$

dove $\mathrm{Aut}(\tilde{M}(x_0), p)$ denota il *gruppo degli automorfismi* del rivestimento, che chiaramente è un gruppo di trasformazioni di $\tilde{M}(x_0)$. Vale:

Proposizione 3.1. *$\phi : \pi_1(M, x_0) \to \mathrm{Aut}(\tilde{M}(x_0), p)$ è un anti-omomorfismo che determina quindi un'azione a destra di $\pi_1(M, x_0)$ su $\tilde{M}(x_0)$.*

Elenchiamo alcune proprietà di questa azione.

(1) L'azione è libera. Infatti se $f_{[\gamma]}(<\alpha>) = <\gamma\alpha> = <\alpha>$, allora $<\gamma\alpha\bar{\alpha}> = <\gamma> = [\gamma] = [c]$.
(2) Ogni fibra $F_x := p^{-1}(x)$ di p è invariante per l'azione, perché ogni automorfismo del rivestimento manda ogni fibra in se stessa. Quindi l'azione si restringe ad una azione su ogni F_x. Per ogni $x \in M$, l'azione su F_x è transitiva. Infatti se $p(<\alpha_1>) = p(<\alpha_2>) = x$, allora $[\gamma] := [\alpha_1\bar{\alpha}_2] \in \pi_1(M, x_0)$ e $f_{[\gamma]}(<\alpha_2>) = <\alpha_1>$.
(3) Rafforzando il punto precedente, per ogni $U \in \mathcal{U}_x$ si consideri $F_U := p^{-1}(U)$ che è una unione di aperti disgiunti che formano un intorno di F_x in $\tilde{M}(x_0)$. Allora l'azione si restringe a ogni F_U ed è transitiva. In particolare ogni orbita $[<\alpha>]_\phi$ dell'azione è *discreta* in $\tilde{M}(x_0)$.
(4) Segue dalle osservazioni precedenti che $M = \tilde{M}(x_0)/p$ si identifica canonicamente con lo spazio quoziente $\tilde{M}(x_0)/\phi$.
(5) $\phi : \pi_1(M, x_0) \to \mathrm{Aut}(\tilde{M}(x_0), p)$ è un anti-isomorfismo. Infatti poiché l'azione è libera, ϕ è iniettivo. Per dimostrare che è surgettivo: sia $f \in \mathrm{Aut}(\tilde{M}(x_0), p)$. Consideriamo un arco τ in $\tilde{M}(x_0)$ che connette $<c>$ e $f(<c>)$. Allora $\gamma = p \circ \tau \in \Omega(M, x_0)$. $[\gamma]$ non dipende dalla scelta di τ perché $\tilde{M}(x_0)$ è semplicemente connesso. Si verifica allora che $f = f_{[\gamma]}$.
(6) Ne segue allora che tutte le proprietà osservate per l'azione del gruppo fondamentale valgono per l'azione di $\mathrm{Aut}(\tilde{M}(x_0), p)$ come gruppo di trasformazioni di $\tilde{M}(x_0)$. Quindi abbiamo che $M = \tilde{M}(x_0)/p = \tilde{M}(x_0)/\phi = \tilde{M}(x_0)/\mathrm{Aut}(\tilde{M}(x_0), p)$ nel senso che abbiamo fornito diverse descrizioni tra loro equivalenti di M come spazio quoziente di $\tilde{M}(x_0)$.

Concludiamo con alcuni semplici esempi.

(1) $p : \mathbb{R} \to S^1$, $p(x) = e^{2\pi i x}$, è il rivestimento universale di S^1. L'azione del gruppo fondamentale è generata dalla traslazione $x \to x + 1$ e riotteniamo il fatto familiare che $S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

(2) Più in generale abbiamo il rivestimento universale

$$p : \mathbb{R}^n \to (S^1)^n$$
$$p(x_1, \dots, x_n) = (e^{2\pi i x_1}, \dots, e^{2\pi i x_n})$$

e corrisponde al fatto che $(S^1)^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$.

(3) $p : S^n \to P(\mathbb{R})^n$, dove $p(x) = [x]$, è il rivestimento universale, il gruppo fondamentale è isomorfo a $\mathbb{Z}/2$ e lo sua azione su S^n è generata dall'applicazione antipodale $x \to -x$.