5.4.16

TEO $\alpha, \beta \in ON$; $\alpha \leq \beta \Leftrightarrow \alpha \subseteq \beta$

DIM • Il $\subseteq$ tra insiemi è un ordine parziale $\leq$, cioè

$x \leq x$,

$x \leq y \leq z \rightarrow x \leq z$

$x \leq y \leq x \rightarrow x = y$

La confrontabilità, che è ciò che manca all'ordine per essere totale, è garantita dal lemma (29.6) $[\alpha, \beta \in ON \rightarrow \alpha \subseteq \beta \vee \beta \subseteq \alpha]$

Inoltre, $\alpha \subseteq \beta \Leftrightarrow \alpha \leq \beta$

TEO Se $P \subseteq ON$ sottoclasse (P formula t.c. $P(x) \rightarrow ON(x)$)

$P \neq \emptyset \Rightarrow P$ ha un minimo.

DIM Sia $\alpha \in P$. Se α è il minimo di P, sono a posto.

Se no, considero $\{\underset{(<)}{\beta \in \alpha} \mid \underset{(P(\beta))}{\beta \in P}\} = X$ (insieme per comprensione)

> **OSS**: Un elemento x di un ordinale α è un ordinale.
>
> infatti: • x è transitivo: $z \in y \in x$. Voglio $z \in x$. Ma
> $z \in y \in x \in \alpha$. α è transitivo $\Rightarrow y, z \in \alpha$.
> α è ordinato da $\in$ (come $<$); quindi
> $x < y < z \Rightarrow x < z$ ✓
>
> • Abbiamo anche mostrato che $x \subset \alpha$; gli elementi di α sono bene ordinati da $\in$ $\Rightarrow$ anche x, in quanto sottoinsieme, è bene ordinato da $\in$.

X è un sottoinsieme di α, $X \neq \emptyset$ perché α non è il minimo.

Ma α è un ordinale $\Rightarrow$ ogni suo sottoinsieme ha minimo

$\Rightarrow X$ ha minimo γ, che ovviamente è anche il min di P. ∎

OSS: $\left.\begin{array}{l} ON \text{ è transitiva: } \alpha \in \beta \in ON \rightarrow \alpha \in ON \\ ON \text{ è anche bene ordinato da } \in (<) \end{array}\right\} \Rightarrow ON$ è ordinale?

Se così fosse, si avrebbe $ON \in ON$, impossibile per un ordinale.

Quindi ON non può essere un insieme.

Ricordo che $V = \{\underset{\text{insiemi}}{x} \mid x = x\}$ non è un insieme: infatti,

$R = \{x \in V \mid x \notin x\}$, V insieme $\Rightarrow R$ insieme.

$x \in R \Leftrightarrow x \in V \wedge x \notin x$.

$R \in R \Leftrightarrow \underbrace{R \in V}_{\text{vero}} \wedge R \notin R$; $R \in R \Leftrightarrow R \notin R$ $\perp$

5.4.16

TEO $\alpha, \beta \in ON$; $\alpha \leq \beta \iff \alpha \subseteq \beta$

DIM • il $\subseteq$ tra insiemi è un ordine parziale $\leq$, cioè
$x \leq x$,
$x \leq y \leq z \to x \leq z$
$x \leq y \leq x \to x = y$
La confrontabilità, che è ciò che manca all'ordine per essere totale, è garantita dal lemma (29.6) $[\alpha, \beta \in ON \to \alpha \subseteq \beta \vee \beta \subseteq \alpha]$
Inoltre, $\alpha \subseteq \beta \iff \alpha \leq \beta$

TEO Se $P \subseteq ON$ sottoclasse (P formula t.c. $P(x) \to ON(x)$)
$P \neq \emptyset \implies P$ ha un minimo.

DIM Sia $\alpha \in P$. Se α è il minimo di P, sono a posto.
Se no, considero $\{\underset{(<)}{\beta \in \alpha} \mid \underset{(P(\beta))}{\beta \in P}\} = X$ (insieme per comprensione)

> **OSS**: Un elemento x di un ordinale α è un ordinale.
> Infatti: • x è transitivo: $z \in y \in x$. Voglio $z \in x$. Ma $z \in y \in x \in \alpha$. α è transitivo $\implies y, z \in \alpha$.
> α è ordinato da $\in$ (come $<$); quindi $x < y < z \implies x < z$ ✓
> • Abbiamo anche mostrato che $x \subset \alpha$; gli elementi di α sono bene ordinati da $\in$ $\implies$ anche x, in quanto sottoinsieme, è bene ordinato da $\in$.

X è un sottoinsieme di α, $X \neq \emptyset$ perché α non è il minimo.
Ma α è un ordinale $\implies$ ogni suo sottoinsieme ha minimo
$\implies X$ ha minimo γ, che ovviamente è anche il min di P. ■

OSS: ON è transitiva: $\alpha \in \beta \in ON \to \alpha \in ON$
ON è anche bene ordinato da $\in$ $(<)$
$\Big\} \implies ON$ è ordinale?
Se così fosse, si avrebbe $ON \in ON$, impossibile per un ordinale.
Quindi ON non può essere un insieme.
Ricordo che $V = \{\underset{\text{insiemi}}{x} \mid x = x\}$ non è un insieme: infatti,
$R = \{x \in V \mid x \notin x\}$, V insieme $\implies R$ insieme.
$x \in R \iff x \in V \wedge x \notin x$.
$R \in R \iff \underbrace{R \in V}_{\text{vero}} \wedge R \notin R$; $R \in R \iff R \notin R$ $\perp$

Lemma: X insieme transitivo di ordinali $\implies X$ è un ordinale

Dim: X è bene ordinato da $\in$ $(<)$, perché ON lo è.
Se è transitivo, è un ordinale per definizione ■

TEO
1. $0 \in ON$
2. $\alpha \in ON \implies S(\alpha) = \alpha \cup \{\alpha\} \in ON$
3. $X \subseteq ON$, X insieme $\implies \underset{\sup X}{\underset{\parallel}{\bigcup X}} \in ON$

} Dice come si costruiscono gli ordinali.

DIM (1), (2) già fatti.

> **ES**: $\{2, 4, 6\} \subseteq ON$;
> $\bigcup\{2, 4, 6\} = 6 \in ON$
> **ES** $X = \mathbb{N} \subseteq ON$
> $\bigcup X = X = \mathbb{N}$ $(\bigcup \omega = \omega)$ infatti:
> • $x \in \bigcup \omega \iff \exists n \;\; x \in n \in \omega \to x \in \omega \to \bigcup \omega \subseteq \omega$
> • $x \in S(x) \in \omega \to x \in \bigcup \omega \to \omega \subseteq \bigcup \omega$

(3) • $X \subseteq ON$ insieme. Gli elementi di X sono ordinali, quindi transitivi $\implies \bigcup X$ transitiva. Infatti,
$a \in b \in \bigcup X$. Voglio $a \in \bigcup X$, quindi che $\exists c$ t.c. $a \in b \in c \in X$,
c transitivo $\implies a \in c \in X \implies a \in \bigcup X$.
• $\bigcup X$ bene ordinata da $\in$. Abbiamo $\bigcup X \subseteq ON$, quindi bene ordinata da $\in$ $(<)$. Infatti,
$a \in \bigcup X \implies \exists b \;\; a \in b \in X \implies b \in ON$.
Gli elem. di un ordinale sono ordinali $\implies a \in ON$ ■

TEO $X \subseteq ON$, X insieme $\implies \bigcup X = \sup(X)$

DIM
• $\bigcup X$ maggiorante di X: $b \in X \implies b \leq \bigcup X$ cioè $b \subseteq \bigcup X$
Sia $u \in b$; voglio $u \in \bigcup X$. Ovvio: $u \in b \in X \overset{def}{\implies} b \in \bigcup X$
• $\bigcup X$ è il min dei maggioranti: infatti, sia $c \in ON$ maggiorante di X, cioè $c \geq b \;\; \forall b \in X$. Voglio $c \geq \bigcup X$, cioè $c \supseteq \bigcup X$
Sia $a \in \bigcup X$. Per ipotesi, $b \leq c$, $b \subseteq c$. Quindi $a \in c$.
Quindi $\bigcup X \subseteq c$ $\bigcup X \leq c$ ■

Coroll: X insieme di ordinali $\implies X$ è limitato superiormente da $\sup X \in ON$ (quindi, qualsiasi sottoinsieme degli ordinali non esaurisce mai tutti gli ordinali. È una seconda dim del fatto che ON non è un insieme)

Teo (induzione su ON)

P proprietà;

1) $P(0)$
2) $P(x) \rightarrow P(S(x)) \quad \forall x \in ON$
3) $\forall \beta \, [\forall \alpha < \beta \; P(\alpha) \rightarrow P(\beta)]$

Allora, $\forall x \in ON \quad P(x)$.

DIM: Se così non fosse, sia γ il minimo ordinale t.c. $\neg P(\gamma)$.
Per definizione, $\forall \alpha < \gamma \quad P(\alpha)$. Ma allora, per (3) vale anche $P(\gamma)$. ■

In realtà, basterebbe la (3): infatti, $\forall \alpha < 0 \quad P(\alpha) = $ vero,

$$\underbrace{\forall \alpha (\underbrace{\alpha < 0}_{\text{falso}} \rightarrow P(\alpha))}_{\text{vero}}$$

OSS: $\alpha \in ON \quad \alpha \neq S(\beta) \; \forall \beta \Rightarrow \alpha = \sup\{\beta \mid \beta < \alpha\}$

Attenzione: $3 \neq \sup\{x \mid x < 3\} = \sup\{0,1,2\} = 2$ (infatti 3 è successore)

DIM: α maggiora $\{\beta \mid \beta < \alpha\}$; se anche γ lo maggiora, bisogna mostrare $\alpha \subseteq \gamma$, cioè $\alpha \leq \gamma$.
Sia $x \in \alpha$ ($x < \alpha$). Siccome α non ha predecessore,
$\exists y \quad x < y < \alpha \Rightarrow y \leq \gamma$; $x \in y \subseteq \gamma$; $x \in \gamma$
$\alpha \subseteq \gamma$; $\alpha \leq \gamma$ ■

In pratica: gli ordinali sono o successori o sup.

OSS: L'induzione su ON si può riformulare così:

- $P(0)$
- $P(x) \rightarrow P(x+1)$
- $\forall \alpha \in Y \quad P(\alpha) \rightarrow P(\sup Y)$ [$\forall Y$ insieme di ordinali]

$\Rightarrow \forall \alpha \in ON \quad P(\alpha)$ (dim per esercizio)

Teo (Ricursione su ON)

$H: ON \times V \rightarrow V$ funzione classe (formula)
Data H, trovo la formula $F: ON \rightarrow V$ t.c.
$\forall a \in ON, \; F(a) = H(a, F|_{\{x \mid x < a\}})$ (F ammette parametri)

Def: $+$ di ordinali (per ricursione sul secondo argomento)

$$\begin{cases} \alpha + 0 = \alpha \\ \alpha + S(\beta) = S(\alpha+\beta) \\ \alpha + \lambda = \sup\limits_{\beta<\lambda} (\alpha+\beta) & [\lambda \text{ limite}] \end{cases}$$

Def: $\cdot$ su ON per ricursione:

$$\begin{cases} \alpha \cdot 0 = 0 \\ \alpha \cdot S(\beta) = \alpha \cdot \beta + \alpha \\ \alpha \cdot \lambda = \sup\limits_{\beta<\lambda} (\alpha \cdot \beta) & [\lambda \text{ limite}] \end{cases}$$

Def: esponenziazione su ON per ricursione:

$$\begin{cases} \alpha^0 = 1 \\ \alpha^{\beta+1} = \alpha^\beta \cdot \alpha \\ \alpha^\lambda = \sup\limits_{\beta<\lambda} (\alpha^\beta) & [\lambda \text{ limite}] \end{cases}$$

OSS: $\left.\begin{array}{l} ot(A, \leq_A) = \alpha \\ ot(B, \leq_B) = \beta \end{array}\right\} \alpha + \beta = ot(A+B, \leq)$

$$\overbrace{\begin{array}{c} A \\ \cong \\ \alpha \end{array} \qquad \begin{array}{c} B \\ \cong \\ \beta \end{array}}^{\cong \alpha+\beta}$$

OSS: Non vale la proprietà commutativa. Ad esempio,

$\underline{\omega + 1} \neq \underline{1 + \omega} = \omega$

un elem seguito da ω elementi, isomorfo a ω elem

L'elemento in più fa da massimo, che in ω non c'è.

Questo vale a livello intuitivo; dimostriamolo.

- $1 + \omega \underset{def}{=} \sup\limits_{x<\omega}(1+x) = \sup\{y \in \omega \mid y \neq 0\} = \omega$
- $\omega + 1 = \omega + S(0) = S(\omega + 0) = S(\omega) = \omega \cup \{\omega\} > \omega$

EX) Calcolare $\omega \cdot 2$

$\omega \cdot 2 = \omega \cdot S(1) = \omega \cdot 1 + \omega$;
$\omega \cdot 1 = \omega \cdot S(0) = \omega \cdot 0 + \omega = 0 + \omega = \sup\limits_{n<\omega}(0+n) \underset{\text{dim per induzione}}{=} \sup(n) = \omega$

$\Rightarrow \omega \cdot 2 = \omega + \omega > \omega$

$\underbrace{||||}_{\omega}\underbrace{||||}_{\omega} = \omega + \omega$

- $\underset{2+2+2+\ldots}{2 \cdot \omega} = \sup\limits_{n<\omega}(2 \cdot n) = \omega$

7.4.15

OSS: $\aleph_0$ e ω non sono la stessa cosa: infatti, ad esempio, $\aleph_0^{\aleph_0}$ non è numerabile, ma ω^{ω} è numerabile.
Il punto è che $\aleph_0^{\aleph_0}$ è esponenziazione tra cardinali, ω^ω è tra ordinali.

EX | $|\omega^\omega| = \aleph_0$. Infatti, per definizione, ω è un limite; quindi

$\omega^\omega = \sup_{n<\omega} \omega^n = \bigcup_{n<\omega} \omega^n$ unione numerabile di insiemi.

Se mostriamo ω^n numerabili, siamo a posto.
Per induzione su $n \in \omega$:
- $\omega^0 = 1$
- $\omega^{n+1} = \omega^n \cdot \omega$; $|\omega| = \aleph_0$; $|\omega^n| = \aleph_0$ per hp induttiva.

Basta mostrare che $\alpha, \beta \in ON$ numerabili $\Rightarrow \alpha\cdot\beta$ numerabile.
Lo facciamo per induzione su β, dato che così è definito il prodotto.
- $\beta = 0$; $\alpha \cdot 0 = 0$ ✓
- $\beta = S\gamma$; $\alpha \cdot S\gamma = \alpha\cdot\gamma + \alpha$. $|\alpha\cdot\gamma| = \aleph_0$ per hp induttiva, α numerabile.

Devo dimostrare che somma di numerabili (ordinali) è numerabile (e poi fare il 3° caso, per β limite).

Lemma: $\alpha, \beta \in ON$ numerabili $\rightarrow |\alpha + \beta| = \aleph_0$.

Dim: induzione su β.
- $\alpha + 0 = \alpha$ ✓
- $\alpha + S(\gamma) = S(\alpha+\gamma)$.
  $|\alpha+\gamma| \leq \aleph_0$ per hp induttiva;
  $|x| \leq \aleph_0 \longrightarrow |S(x)| \leq \aleph_0$ (per ora diamolo per buono)
- $\alpha + \lambda = \bigcup_{\rho<\lambda} \alpha+\rho$; $|\alpha+\rho| \leq \aleph_0$ per hp induttiva.
  λ numerabile per hp; $\rho \in \lambda \Rightarrow$ unione numerabile,
  $\left|\bigcup_{\rho<\lambda} \alpha+\rho\right| = \aleph_0$ ■

- $|\alpha\cdot\lambda| \leq \aleph_0$, poiché $\alpha\cdot\lambda = \bigcup_{\rho<\lambda} \alpha\cdot\rho$.
  Per hp induttiva, $|\alpha\cdot\rho| \leq \aleph_0$, $|\lambda| \leq \aleph_0 \rightarrow \left|\bigcup_{\rho<\lambda} \alpha+\rho\right| \leq \aleph_0$

■

EX $\alpha, \beta \in ON$, $|\alpha|, |\beta| \leq \aleph_0 \longrightarrow |\alpha^\beta| \leq \aleph_0$

OSS: Tutte le operazioni viste fino ad ora restano nel numerabile.

EX 1) $(\alpha+\beta)+\gamma \overset{?}{=} \alpha + (\beta+\gamma)$

2) $(\alpha\cdot\beta)\cdot\gamma \overset{?}{=} \alpha\cdot(\beta\cdot\gamma)$ per esercizio

Sol 1) Induzione su γ:
- $\gamma = 0$: $(\alpha+\beta)+0 = \alpha+(\beta+0)$ ✓
  $\alpha+\beta = \alpha+\beta$
- $\gamma = S(\vartheta)$: $(\alpha+\beta)+S(\vartheta) \underset{def}{=} S((\alpha+\beta)+\vartheta) \underset{ind}{=} S(\alpha+(\beta+\vartheta)) \underset{def}{=}$
  $= \alpha + S(\beta+\vartheta) \underset{def}{=} \alpha + (\beta + S(\vartheta))$ ✓
- $\gamma = \lambda$ limite: $(\alpha+\beta)+\lambda \underset{def}{=} \sup_{\rho<\lambda}[(\alpha+\beta)+\rho] \underset{ind}{=} \sup_{\rho<\lambda}[\alpha+(\beta+\rho)] =$
  vero ma da verif. $= \alpha + \sup_{\rho<\lambda}(\beta+\rho) \underset{lemma}{=} \alpha + (\beta + \sup_{\rho<\lambda}\rho) \underset{def}{=} \alpha + (\beta+\lambda)$

Lemma: $\alpha + \sup_{i\in I}(\beta_i) = \sup_{i\in I}(\alpha+\beta_i)$ (per esercizio)

EX Vale la proprietà distributiva?
1) $\alpha\cdot(\beta+\gamma) \overset{?}{=} \alpha\cdot\beta + \alpha\cdot\gamma$ (vera: induzione su γ)
2) $(\beta+\gamma)\cdot\alpha = \beta\cdot\alpha + \gamma\cdot\alpha$ (falsa: $(1+1)\cdot\omega = 2\cdot\omega \neq \omega+\omega$)

(1)
- $\gamma = 0$ $\alpha\cdot(\beta+0) = \alpha\cdot\beta = \alpha\cdot\beta + \alpha\cdot 0$ ✓
- $\gamma = S(\vartheta)$: $\alpha\cdot(\beta+S(\vartheta)) \underset{def}{=} \alpha\cdot(S(\beta+\vartheta)) \underset{def}{=} \alpha\cdot(\beta+\vartheta)+\alpha =$
  $\underset{ind}{=} (\alpha\cdot\beta + \alpha\cdot\vartheta) + \alpha \underset{assoc}{=} \alpha\cdot\beta + (\alpha\cdot\vartheta + \alpha) \underset{def}{=} \alpha\cdot\beta + (\alpha\cdot S(\vartheta))$ ✓
- λ limite: $\alpha\cdot(\beta+\lambda) = \alpha\cdot(\sup_{\rho<\lambda}(\beta+\rho)) = \sup_{\rho<\lambda} \alpha\cdot(\beta+\rho) \underset{ind}{=}$
  $= \sup_{\rho<\lambda}(\alpha\cdot\beta + \alpha\cdot\rho) = \alpha\cdot\beta + \sup_{\rho<\lambda}\alpha\cdot\rho = \alpha\cdot\beta + \alpha\cdot\lambda$ ✓

EX Quanto fa $\omega + \omega^2$?
- $\omega + \omega^2 = \omega(1+\omega) = \omega\cdot\omega = \omega^2$ $\quad \omega^2 = \underbrace{\omega+\omega+\omega+\ldots}_{\omega \text{ volte}}$
- $\omega^2 + \omega > \omega^2$

Aggiungere un ω a sx non cambia, a dx sì, perché ho
$\underbrace{\omega+\omega+\omega+\ldots}_{\omega \text{ volte}} + \omega = \underbrace{\ldots}_{\omega}$

Il derivato è $D(\omega^2+\omega) = \omega+1$
$D(\omega^2) = \omega$

Sottrazione

oss: tra cardinali non si può fare: $\aleph_0 - \aleph_0 = ?$

se avesse senso una sottrazione, dovrebbe essere

$A \subseteq B$, $|B \setminus A| = |B| - |A|$. Però

$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{N}$; $|\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}| = |\mathbb{N}| - |\mathbb{N}| = |\emptyset| = 0 \overset{?}{\Rightarrow} \aleph_0 - \aleph_0 = 0$?

però l'operazione deve essere indipendente dai rappresentanti;

$\aleph_0 - \aleph_0 = |\mathbb{N}| - |2\mathbb{N}| = |\mathbb{N} - 2\mathbb{N}| = |\text{Dispari}| = \aleph_0$ ↯

Tra ordinali invece funziona, togliendo sempre segmenti iniziali.

Teo $\alpha \le \beta \Rightarrow \exists!\ \gamma \quad \alpha + \gamma = \beta$ e def $\gamma = \beta - \alpha$

Dim Induzione su β. Se $\beta < \alpha$ la tesi è vera, perché ho la premessa falsa $\Rightarrow$ l'implicazione $F \to V$ è vera.

Posso assumere quindi $\alpha \le \beta$.

- $\beta = 0 \Rightarrow \alpha = 0 \Rightarrow \gamma = 0$ unico ✓
- Successore: $\alpha + \gamma = \beta \Rightarrow \alpha + S(\gamma) = S(\beta)$
  Quindi, se $\exists \gamma$ per $\beta \to \exists \gamma'$ per $S(\beta)$, $\gamma' = S(\gamma)$.
  Unicità: se fosse γ'' t.c. $\alpha + \gamma'' = S(\beta) = S(\alpha+\gamma) = \alpha + S(\gamma)$
  (Bisogna andare avanti, ma per ora non lo facciamo)
- Caso limite: voglio γ t.c. $\alpha + \gamma = \lambda$.
  Per induzione per $\rho < \lambda$, $\exists(!)\ \gamma_\rho \quad \alpha + \gamma_\rho = \rho$ (serve unicità)
  $\gamma = \sup_{\rho<\lambda} \gamma_\rho \qquad \alpha + \gamma = \sup_{\rho<\lambda}(\alpha + \gamma_\rho) = \sup_{\rho<\lambda} \rho = \lambda$.
  Finire per esercizio.

Divisione

Teo $\alpha, \beta \neq 0$, $\exists!\ q \in ON$, $r \in ON$

$$\alpha = \beta \cdot q + r, \quad r < \beta.$$

Dim Sia q max t.c. $\beta \cdot q \le \alpha$, $r = \alpha - (\beta \cdot q)$

Come faccio ad essere sicuro che ci sia un max?

Prendo il minimo di quelli strettamente maggiori e sottraggo 1, mostro che non è un limite. In alternativa, prendo

$Q = \{q \mid \beta \cdot q \le \alpha\}$; mostro che è un insieme, perché

$q \in Q \to q < \alpha + 1 \to q \in \alpha + 1$ (perché $\beta \neq 0$)

Bisogna, per questo, dim che $\beta \cdot q \le q$.

Allora, se Q è insieme, prendo $\bar{q} = \sup Q = \bigcup Q$

$\beta \cdot \bar{q} = \beta \cdot \sup Q = \sup_{q \in Q} (\underbrace{\beta \cdot q}_{\le \alpha}) \le \alpha$;

$\bar{q} \in Q \to \bar{q} = \max(Q)$

$\alpha - \beta\bar{q} = r \to \alpha = \beta\bar{q} + r$

- $r < \beta$, perché se $r \ge \beta$ potrei fare $r' = r - \beta$ e ottenere
  $\alpha = \beta \cdot (\bar{q}+1) + \underbrace{(r - \beta)}_{r'}$ $\perp$ per la massimalità di $\bar{q}$.

ES
- $\omega : 2 = ?$ (scrivo $\omega \underline{|2}$)
  $\omega = 2 \cdot q + r = 2 \cdot \omega + 0$
- $\omega + 1 \underline{|2} = \omega + r$, perché $\omega + 1 = 2 \cdot \omega + 1$

Base 10 per ordinali:

Ogni $0 \neq \alpha \in ON$ si scrive in modo unico come

$\alpha = 10^{\alpha_1} \cdot n_1 + \ldots + 10^{\alpha_k} \cdot n_k$

Dove $n_i < 10\ \forall i$; $\alpha_i \in ON$; $k < \omega$ (somma finita)

ES In base 10 si scrive $\omega = 10^{\omega} \cdot 1$

$\omega + \omega = 10^{\omega} \cdot 2$

Base ω

$0 \neq \alpha \in ON$; esistono unici $k \in \omega$, $n_1, \ldots, n_k$, $\alpha_1 > \ldots > \alpha_k$

$\alpha = \omega^{\alpha_1} \cdot n_1 + \ldots + \omega^{\alpha_k} \cdot n_k = \sum_{i=1}^{k} \omega^{\alpha_i} \cdot n_i$, $n_i < \omega$, $\alpha_i \in ON$

Dim: Cominciamo con lo scegliere α_1 e n_1.

Consideriamo il massimo α_1 $\omega^{\alpha_1} \le \alpha$. (Verificare che $\exists$, come prima)

$\alpha = \omega^{\alpha_1} \cdot q + r$, $r < \omega^{\alpha_1}$, e prendo $n_1 = q$. $n_1 < \omega$, perché se fosse $q \ge \omega$ potrei scrivere $q = \omega + \gamma$ e

$\alpha \ge \omega^{\alpha_1} \cdot q = \omega^{\alpha_1}(\omega + \gamma) = \omega^{\alpha_1} \cdot \omega + \omega^{\alpha_1}\gamma = \omega^{\alpha_1 + 1} + \text{roba}$ $\perp$

Per induzione, il resto lo rappresento in base ω

$\alpha = \omega^{\alpha_1} \cdot q + (\text{rappresentazione di } r \text{ in base } \omega)$

per concludere, va verificato che gli esponenti per r sono $< \alpha_1$

11-04-2016

Def: Multinsieme finito di naturali è una $f: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ t.c. $\{x \in \mathbb{N} \mid fx \neq 0\}$ è finito.

$[2, 2, 8, 8, 8] = f$

(manca piccola parte su multinsiemi)

Def: $R \subseteq X \times X$ è ben fondata se $\nexists (a_n \mid n \in \mathbb{N})$ $\forall n$ $a_n R a_{n+1}$

EX $\circ\!\!\rightarrow$ tra multinsiemi è ben fondata.

DIM Associo a un multinsieme M un ordinale $\alpha_M \in ON$ in modo che se $M \circ\!\!\rightarrow M' \Rightarrow \alpha_M > \alpha_{M'}$. Se riesco a mostrarlo sono a posto, perché le succ. decrescenti di ordinali si fermano sempre. Questa è una tecnica generale per mostrare che una relazione è ben fondata. Che ordinale associamo a M?

$$\left.\begin{aligned} \alpha_{[2,2,8,8,8]} &= \omega^8 \cdot 3 + \omega^2 \cdot 2 \\ &\quad\ \vee \\ \alpha_{[2,2,8,8,7,7,7,7,7]} &= \omega^8 \cdot 2 + \omega^7 \cdot 5 + \omega^2 \cdot 2 \end{aligned}\right\} \omega^8 > \omega^7 \cdot 5$$

Formalizzando, $\alpha_M = \sum_{i=0}^{k} \omega^{a_i} \cdot n_i$ se a_i sta in M con moltepl. n_i, con $a_0 > a_1 > \dots > a_k$ (somma di ordinali non è commutativa).

Ad esempio, $\omega^8 \cdot 3 + \omega^2 \cdot 2 \neq \omega^2 \cdot 2 + \omega^8 \cdot 3 = \omega^8 \cdot 3$

$$\omega^2 + \underbrace{\omega^2 + \omega^8}_{} + \omega^8 + \omega^8$$

$$\omega^2(1 + \omega^6) = \omega^2 \cdot \omega^6 = \omega^8$$

[**Teo** $\alpha \geq \omega \Rightarrow 1 + \alpha = \alpha$. Infatti, $\alpha = \omega + \beta$;

$1 + \alpha = 1 + (\omega + \beta) = (1 + \omega) + \beta = \omega + \beta = \alpha$

Coroll: $a > b \rightarrow \omega^b + \omega^a = \omega^a$.

Dim: $\omega^b + \omega^a = \omega^b(1 + \omega^{a-b}) = \omega^b \cdot \omega^{a-b} = \omega^a$]

Ex $\omega^a \cdot \omega^b = \omega^{a+b}$]

- $\alpha_M > \alpha_{M'}$: infatti, possiamo scrivere

$$\sum \omega^{a_i} \cdot n_i = \underbrace{\omega^{a_1} + \omega^{a_1} + \dots + \omega^{a_1}}_{n_1} + \underbrace{\omega^{a_2} + \dots + \omega^{a_2}}_{n_2} + \dots$$

$$\vee$$

$$\underbrace{\omega^{a_1} + \dots + \omega^{a_1}}_{n_1} + \omega^{a_2} \cdot (n_2 - 1) + \omega^{a_3} \cdot m + \dots$$

(formalizzare il perché) $\blacksquare$

EX $B \in \mathbb{N}$; $n = \sum_{i=0}^{k} B^i \cdot n_i$; (successioni di Goodstein)

$f_B(n) = \sum_{i=0}^{k} (B+1)^{f_B(i)} \cdot n_i$; $f_B(0) = 0$

$n' = f_B(n) - 1$ $\qquad$ $n \Vdash\!\!\longrightarrow n'$ con questa regola.

$n'' = f_{B+1}(n') - 1$

Per dimostrare che $n \Vdash\!\!\longrightarrow n'$ è ben fondata, associo un ordinale.

$$n_0 \xrightarrow[B]{} n_1 \xrightarrow[B+1]{} n_2 \xrightarrow[B+2]{} n_3 \xrightarrow[B+3]{} \dots$$

$$n_k = \sum_{i=0}^{m} (B+k)^i \cdot c_i \longmapsto a_{n_k} = \sum_{i=0}^{m} \omega^{a_i} \cdot c_i$$

Ora si tratta di mostrare che un passo di $n \mapsto$ fa calare l'ordinale.

ES: $n = 10^{10^4 \cdot 3} \cdot 8 + 10^{[10^{(10^2+10\cdot 3)}+4]} \cdot 7 + 4 \longmapsto a_n = \omega^{\omega^4 \cdot 3} \cdot 8 + \omega^{[\omega^{(\omega^2+\omega\cdot 3)}+4]} \cdot 7 + 4$

$\downarrow$

$n' \mapsto a_{n'} = \omega^{\omega^4 \cdot 3} \cdot 8 + \omega^{[\omega^{(\omega^2+\omega\cdot 3)}+4]} \cdot 7 + 3$

In questo caso, chiaramente $\sum \omega^{a_i} \cdot n_i + 4 > \sum \omega^{a_i} \cdot n_i + 3$

Se non ci fosse il "$+4$" alla fine?

Avrei $a_n = \omega^{[\omega^{(\omega^2+\omega\cdot 3)}+4]} \cdot 7 + \omega^{\omega^4 \cdot 3} \cdot 8$;

$(10^4 \cdot 3) = t$

$n' = 11^{[11^{(11^2+11\cdot 3)}+4]} \cdot 7 + \underbrace{10^t \cdot 8 - 1}_{10^t \cdot 7 + \sum_{i=0}^{t-1} 10^i \cdot 9}$

11^t "

cambiamo esempio per avere conti più gestibili

$n = 10^5 \cdot 8 \longmapsto a_n = \omega^5 \cdot 8$

$\Downarrow$

$n' = 11^5 \cdot 8 = 11^5 \cdot 7 + 11^5 - 1 = 11^5 \cdot 7 + 11^4 \cdot 10 + 11^3 \cdot 10 + 11^2 \cdot 10 + 11 \cdot 10 + 10$

$a_{n'} = \omega^5 \cdot 7 + \omega^4 \cdot 10 + \omega^3 \cdot 10 + \omega^2 \cdot 10 + \omega \cdot 10 + 10$

$a_n > a_{n'}$ ■

EX Funzione di Ackermann

$$\begin{cases} f(0,n) = n+1 ; \\ f(m+1, 0) = f(m, 1) ; \\ f(m+1, n+1) = f(m, f(m+1, n)) \end{cases}$$

Già per calcolare $f(2,2)$ ci vogliono una marea di conti;

$f(10,10)$ non è calcolabile nemmeno coi computer più potenti.

Si può comunque mostrare che è ben fondata.

Dato un input (n, m) su cui calcolare f, gli associo un ordinale $a_{(n,m)} = \omega \cdot n + m$;

$n' < n \Rightarrow a_{(n',m)} = \omega \cdot n' + m$; $\Big\}\ a_{(n',m)} < a_{(n,k)} \quad \forall k$

Per induzione su $a = \omega \cdot n + m$, il calcolo di $f(n,m)$ termina.

$f(10,10) = f(9, f(10,9))$; $a_{(10,9)} < a_{(10,10)}$

per ipotesi induttiva, il calcolo di $f(10,9)$ termina; sia $k \in \mathbb{N}$ il risultato.

Dobbiamo calcolare adesso $f(9,k)$,

$a_{(9,k)} = \omega \cdot 9 + k < a_{(10,10)} = \omega \cdot 10 + 10$.

Quindi $f(9,k)$ termina.

(Ex: provare a risolverlo senza usare gli ordinali.)

12.4.16

Def: Processo = successione di triple (a,b,c).

Idea: la tripla (a,b,c) indica il fatto che $f(a,b) = c$.

Il processo per calcolare $f(a,b)$ termina: si dimostra per induzione su $\omega m + n$ (si parla del processo di Ackermann).

Induzione su $\omega m + n \Leftrightarrow$ induzione primaria su m, secondaria su n.

EX Mostriamo quindi che $f(m,n)$ termina.

$P(m) \equiv \underbrace{\forall n\ f(m,n)}_{\text{si mostra per induz. su } n}$ termina.

OSS: se ho un processo contenente $(m+1, n, k)$, (m, k, s) allora posso allungarlo mettendoci $(m+1, n+1, s)$.

Quindi si può mostrare che il processo di Ackermann termina anche senza usare gli ordinali, però è scomodo e laborioso.

OSS: $\omega m + n < \omega^2 \Rightarrow$ induzione doppia corrisponde a induzione su ω^2.

Def: $\varepsilon_0 \in ON$ si definisce come $\varepsilon_0 = \sup_{n<\omega} \underbrace{\omega^{\omega^{\omega^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}}_{n} = \sup_{n<\omega} \omega(n)$

Prop: $\omega^{\varepsilon_0} = \varepsilon_0$.

Infatti, $\omega^{\varepsilon_0} = \sup_{a<\varepsilon_0} \omega^a = \sup_n \omega^{\omega(n)} = \sup_n \omega(n+1) = \varepsilon_0$

EX $R \subseteq X \times X$; esiste minima $R^* \supseteq R$ transitiva.

Stimare la cardinalità di R^*, conoscendo quella di R.

Sol Date $R, S \subseteq X \times X$, posso definire $R \circ S \subseteq X \times X$ come $x (R \circ S) y \Leftrightarrow \exists z\, [xRz \wedge zSy]$ (analogo a compos. di funz.)

Cominciamo con lo stimare la cardinalità di $R \circ S$.

$R \times S \supseteq \tilde{X} = \{ \langle \langle x,z \rangle, \langle z,y \rangle \rangle \mid z \in X \}$

C'è una funzione surgettiva da $\tilde{X}$ a $R \circ S$.

$\langle \langle x,z \rangle, \langle z,y \rangle \rangle \longmapsto \langle x,y \rangle \in R \circ S$.

Quindi $|R \circ S| \le |\tilde{X}| \le |R \times S|$.

In particolare, $|R|, |S| \le \aleph_0 \Rightarrow |R \circ S| \le \aleph_0$

Tornando all'esercizio, l'idea è definire R_0 = identità;

$R_1 = R$; $R_{n+1} = R_n \circ R$; $R^* = \bigcup_{n \in \mathbb{N}, n \ge 1} R_n \supseteq R$.

Dico che R^* così definita è transitiva. Infatti:

$x R^* y R^* z \overset{?}{\Rightarrow} x R^* z$;

$xR^*y \to \exists n\ xR_ny$

$yR^*z \to \exists k\ yR_kz$

$x(R_n\circ R_k)z \Rightarrow xR_{k+n}z \Rightarrow xR^*z$

induzione su k.

- $k=0,1$ ovvio;
- Assumo che valga per k.

$R_n\circ R_{k+1} \underset{def}{=} R_n\circ R_k\circ R \underset{ind}{=} R_{n+k}\circ R \underset{def}{=} R_{n+k+1}$

Quindi è transitiva; va mostrato che è la più piccola transitiva che contiene R.

Si fa per induzione: S transitiva $\supseteq R$; si mostra

$S\supseteq R_n\ \forall n \Rightarrow S\supseteq R^* \Rightarrow R^*$ è la minima.

- Cardinalità: $|R|\le\aleph_0$

per induzione su n, $|R_n|\le\aleph_0$

$|R_{n+1}| = |R_n\circ R| \le |R_n\times R| = |R_n|\times|R| \underset{ind}{\le} \aleph_0\times\aleph_0=\aleph_0$

OSS: Avrei potuto affrontare il problema anche in modo "ricorsivo":

$xR^*y \iff xRy \vee \exists z(xRz\wedge zR^*y)$.

e R^* è la più piccola che la soddisfa.

TEO (Ricursione su ordinali)

Si può definire una F per induzione su α:

$F(\alpha) = H(\alpha, F|_{\{x|x<\alpha\}})$, H funzione classe data,

$H: ON\times V\longrightarrow V$

Def: dico che f è una γ-approssimazione di F

se $f(\alpha)=H(\alpha, f|_\alpha)\quad \forall\alpha<\gamma$. $f:\gamma \longrightarrow V$, f insieme

DIM Per induzione su $\gamma\in ON$, $\exists!\ f$ γ-approssimazione.

- $\gamma=0 \to f=\emptyset$.

passo induttivo: $\forall\beta<\gamma\ \exists!$ β-appross di $F = f_\beta$

troviamo una $\beta+1$-approssimazione $f_{\beta+1}:\beta+1\longrightarrow V$

$\beta+1=\beta\cup\{\beta\}=\{x|x\le\beta\}$

$f_{\beta+1}=f_\beta$ su β;

$f_{\beta+1}(\beta)=H(\beta, f_{\beta+1}|_\beta) = H(\beta,f_\beta)$

- passaggio a γ limite

$\forall\beta<\gamma$ esiste f_β. $f_\gamma=\bigcup_{\beta<\gamma} f_\beta = \bigcup\{f_\beta|\beta<\gamma\}$

f_γ così definita è una funzione, in quanto le f_β coincidono sul dominio comune a 2 a 2. Qual è il dominio di f_γ?

- $dom(f_\gamma)=\bigcup_{\beta<\gamma} dom(f_\beta) = \bigcup_{\beta<\gamma}\beta = \gamma$ (perché γ limite).
- $\beta\in dom(f_\beta)$, $\beta<\gamma$; $f_\gamma(\beta) = \underbrace{f_{\beta+1}}_{\beta<\gamma,\ \gamma \text{ limite} \Rightarrow \beta+1<\gamma}(\beta) \overset{ind}{=} H(\beta, f_{\beta+1}|_\beta) = H(\beta, f_\beta) = H(\beta, f_\gamma|_\beta)$

Insomma, l'idea è che avendo un'approssimazione, trovo quella più grande.

Ora prendo $F=\bigcup_{\beta\in ON} f_\beta$, cioè $F(x)=y \iff \exists\beta(ON(\beta)\wedge f_\beta(x)=y\wedge x\in dom\, f_\beta)$ ■

OSS $\alpha+\beta=\gamma \iff \exists f:\beta+1\longrightarrow V$; $f(x)=y \leftrightarrow \alpha+x=y$

$f(0)=\alpha$;

$f(sx)=sf(x)\quad\forall x\in dom\, f$

$f(\lambda)=\bigcup_{\beta<\lambda} f(\beta)$, λ limite $\in dom(f)$.

Def $R\subseteq X\times X$ è ben fondata se $\nexists(a_n|n\in\omega)\ \forall n\ a_{n+1}\overset{"<"}{R}a_n$

Prop R ben fondata $\leftrightarrow \forall Y\subseteq X\quad Y\neq\emptyset\quad \exists y\in Y$ minimale.

(cioè $\nexists z\in Y\ zRy$ (strettamente minore di y)).

ES $R\subseteq (\mathbb{N}\times\mathbb{N})\times(\mathbb{N}\times\mathbb{N})$

$(a,b)R(c,d) \iff (a<c\wedge b\le d)\vee(a\le c\wedge b<d)$

es: $(3,4)R(2,4)$; $(5,6)R(5,7)$.

Non è un ordine totale, però è ben fondato.

Infatti, basta associare ordinali decrescenti:

esiste $f:\mathbb{N}\times\mathbb{N}\longrightarrow ON$ t.c. $(a,b)R(c,d)\Rightarrow f(a,b)<f(c,d)$

$f(a,b)=a+b\in\mathbb{N}$

TEO (Ricursione)

$R\subseteq X\times X$ ben fondata, X insieme, data

$H: X\times V\longrightarrow V$, Posso definire $F:X\longrightarrow V$

$F(a)=H(a, F|_{\{b|bRa\}})$

"DIM": $F(a)$ non definito $\Rightarrow \exists b(bRa\wedge f(b)$ non definito$)$.

Così costruisco una succ decrescente; però R è ben fondata, non è possibile. Ma in realtà dovrei dire cosa vuol dire "non definito"

14-4-16

EX) $\alpha,\beta\in ON$; $\overbrace{\alpha+\beta}^{\in ON} \overset{f}{\cong} \overbrace{\alpha\times\{0\}\cup\beta\times\{1\}}^{\notin ON}$ con ordine lex.

Sol) Sia $f: \alpha+\beta \to \alpha\times\{0\}\cup\beta\times\{1\}$

$x<\alpha+\beta;\ \alpha+y \longmapsto (y,1)$

2 casi:

- $x<\alpha \Rightarrow f(x)=(x,0)$
- $x\geq\alpha \Rightarrow \exists y\ \alpha+y=x \Rightarrow f(x)=(y,1)$, $y = x-\alpha$

EX) $\alpha,\beta\in ON$; $\alpha\cdot\beta \overset{f}{\cong} \overbrace{\alpha\times\beta}^{\notin ON}$ con $\leq_{lex}$

$x=\alpha\cdot q+r$, $q\in ON$, $r<\alpha$; $f(x)=(r,q)$;

oss $q<\beta$

ES: $27<10\cdot3$, $27=10\cdot2+7 \longmapsto (7,2)\in 10\times3$

f quindi è biunivoca, crescente per $\leq_{lex}$, infatti,

$x<x'$; $x=\alpha\cdot q+r$, $x'=\alpha\cdot q'+r'$

$\Rightarrow (q'>q)\vee(q'=q\wedge r'>r) \Rightarrow f(x)=(r,q)<(r',q')=f(x')$

$\Rightarrow f$ isomorfismo.

OSS Questi esercizi aiutano a farsi un'immagine geometrica di $\alpha+\beta$ e $\alpha\cdot\beta$ per ordinali.

EX) $2^\beta \cong \{f \mid f:\beta\to 2 \wedge \underbrace{\text{supporto}(f)}_{=\{x\mid f(x)\neq0\}} \text{ finito}\} =$

con l'ordine lex "inverso", cioè: → insieme finito $\Rightarrow \exists \max$

prese $f\neq g\in S$, sia $b=\max\{x\mid fx\neq gx\}$;

$f<g \iff f(b)<g(b)$

DIM) Del teo di ricorsione per relazioni ben fondate (cenni)

f è una approssimazione se dom(f) è R-chiuso ↓

$xRy \wedge y\in dom(f) \Rightarrow x\in dom(f)$

$f(a)=H(a, f|_{\{x\mid xRa\}})\ \forall a\in dom(f)\subseteq A$

F = Unione di tutte le approssimazioni

ES) Di ricorsione: la funzione rango.

$R\subseteq A\times B$ ben fondata;

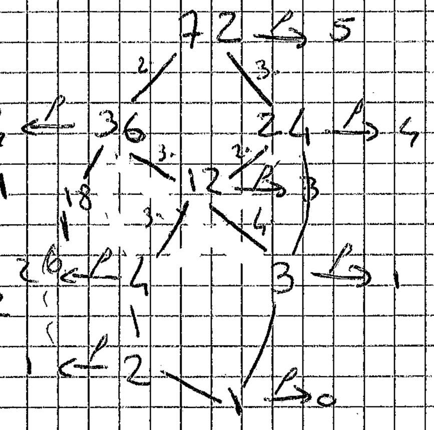
$\rho: A\to ON$

$\rho(a)=\bigcup\{\rho(b)+1 \mid bRa\} = \sup\{\rho(b)+1\mid bRa\}$

esempio: $A=\mathbb{N}$, $xRy \iff x|y \wedge x\neq y$.

È ben fondata, non ci sono succ infinite in cui un numero divide il precedente. In questo caso, calcoliamo ad esempio

$\rho(72)=?$



(Il rango è l'"altezza" rispetto alla relazione ben fondata)

- $\rho(1)=\bigcup\emptyset=\emptyset=0$
- $\rho(2)=\bigcup\{\rho(1)+1\}=\bigcup\{1\}=1$
- $\rho(3)=1$
- $\rho(4)=\bigcup\{\rho(2)+1\}=\bigcup\{2\}=2$
- $\rho(12)=\bigcup\{\rho(4)+1, \rho(3)+1\}= \bigcup\{3,2\}=3$

⋮

$\rho(72)=5$

DIM) Per induzione, $\rho(b)\in ON\ \forall b\ bRa$

Unione di un insieme di ordinali è un ordinale $\Rightarrow \rho(a)\in ON$.

Inoltre, $\bigcup=\sup$.

~~Coroll) Ogni buon ordine $(A,<)$ è isomorfo a un ordinale $\alpha\in ON$~~

~~DIM: Considero la funzione rango $\rho: A\to ON$; $\alpha=Im(\rho)$~~

TEO) $(A,<)$ buon ordine $\Rightarrow$ esiste $\alpha\in ON$ e un isomorfismo

$f:(A,<)\to(\alpha,\in)$ $\quad x<y \iff f(x)\in f(y)$

DIM) $f(a)=\{f(b)\mid b<a\}$ ben posta: ricorsione su $<$.

(Attenzione: guardare in che punto si usa l'assioma di rimpiazzamento).

Motivazione: $b<a \to f(b)\in f(a)$.

- Per induzione, $f(a)\in ON$.

L'ipotesi induttiva è $\forall b<a\ f(b)\in ON$

Quindi $f(a)\subseteq ON$. $f(a)$ è transitiva:

$x\in y\in f(a)$ $\quad \exists b<a\ y=f(b)$, $x\in f(b)=\{f(c)\mid c<b\}$

$\exists c<b\ \ x=f(c)$ $\quad c<b<a \Rightarrow c<a \Rightarrow x\in f(a)$.

[f(a) è un insieme: è implicato nel teo di ricorsione, che usa il rimpiazzamento $\{b\mid b<a\}$

$\downarrow$

$\{f(b)\mid b<a\}$]

Quindi $f(a)\in ON\ \forall a\in A$. $Im(f)\subset ON$;

Im(f) è transitiva: $x\in y\in Im(f)$; $y=f(a)\Rightarrow x=f(b)$

$\Rightarrow x\in Im(f)$. Quindi $Im(f)\in ON$, perché ins. trans. di ordinali.

• $f: A \to \alpha$ surgettiva;
$x < x \Rightarrow fx \in fy$; f crescente, quindi iniettiva;
Mostriamo che preserva l'ordine $\Rightarrow$ è isomorfismo.
$fx \in fy \overset{?}{\Rightarrow} x < y$
Se non fosse così, avrei $x = y \vee x > y$

$\downarrow$ $fx = fy$ $\perp$ $\qquad \searrow fx > fy$

Quindi, posto $Im(f) = \alpha$, abbiamo dimostrato il teorema ■

OSS $\alpha \in ON$, $\alpha = \sup\{a+1 \mid a \in \alpha\}$. Infatti, ci sono due casi:
• $\alpha = b+1$ (successore) $\Rightarrow$ il sup è $b+1 = \alpha$
• α limite: $a < \alpha \Rightarrow a+1 < \alpha$.
Sappiamo che $\alpha \geq \sup\{a+1 \mid a \in \alpha\}$; per l'altro verso,
$b < \alpha \underset{\alpha \text{ lim}}{\Rightarrow} b+1 < \alpha$; $b \in b+1 \in \sup\{a+1 \mid a \in \alpha\}$

OSS: f costruito nella dimostrazione è la funzione rango.
Infatti, $f(a) = \underbrace{\{f(b) \mid b < a\}}_{\in ON} = \sup\{f(b)+1 \mid b < a\} = \rho(a)$
In questo caso, ρ è iniettivo (in generale non lo è; diventa iniettivo se lo applico a un buon ordine).

ES $A = \mathbb{N} \times \{0\} \cup \mathbb{N} \times \{1\}$, $<_{lex}$:
$(0,0) \to (1,0) \to (2,0) \to \dots \to (0,1) \to (1,1) \to \dots$
$\rho = 0$, $\rho = 1$, $\rho = 2$ ..., $\rho = \sup\{\rho(n,0)+1 \mid n \in \omega\} = \sup\{n+1 \mid n \in \omega\} = \omega$

Qui abbiamo usato l'assioma di rimpiazzamento:
$Im(\rho) = \sup\{(n,1)+1 \mid n \in \mathbb{N}\}$; posso fare il sup se è un insieme e lo è perché $\{n \mid n \in \mathbb{N}\}$ è insieme $\to$ per rimpiazzamento, $\{n+1 \mid n \in \mathbb{N}\}$ è insieme $\to$ rimpiazzo; $\{(n,1)+1 \mid n \in \mathbb{N}\}$ ins.
$Im(\rho) = \omega + \omega$.

Corol: Ogni buon ordine $(A,<)$ è isom. a un unico ordinale $\alpha \in ON$.

Def: $\alpha = ot(A,<)$ è la definizione di tipo d'ordine.

Corol: dati $(A,<_A)$, $(B,<_B)$ buoni ordini, uno è isomorfo a un segm. dell'altro.
Infatti, uso due ordinali, uno uguale a un segm. dell'altro.

EX Dimostrare il corollario senza usare gli ordinali.

TEO Esiste un ordinale non numerabile. Lo chiamiamo di Hartogs, H.

DIM $H(A) = \{\alpha \in ON \mid |\alpha| \leq |A|\}$.
Ad esempio, $H(\mathbb{N}) = \{$ordinali numerabili$\}$.
Affermiamo che $H(\mathbb{N}) \in ON$ e non è numerabile.
• $H(A) \in ON$ perché insieme transitivo di ordinali. Inoltre, $|H(A)| > |A|$

$\alpha \in \beta \in H(\mathbb{N}) \Rightarrow |\beta| \leq |\mathbb{N}| \Rightarrow |\alpha| \leq |\mathbb{N}|$

$H(\mathbb{N})$ è un insieme: lo dimostriamo la prossima volta.
• $H(\mathbb{N})$ non è numerabile. Infatti:
$|\alpha| \leq |\mathbb{N}|$, $\alpha \in ON$
$\downarrow$
$\alpha \in H(\mathbb{N}) \to \alpha < H(\mathbb{N}) \to \alpha \neq H(\mathbb{N})$