

Elementi di Teoria degli Insiemi

Alessandro Berarducci

Scritto del 4 luglio 2016

Esercizio 1. Esiste un insieme ordinato A di cofinalità \aleph_{ω_1} ?

Esercizio 2. Esiste un ordinale $\alpha > 1$ tale che $\alpha^\alpha = \alpha$? (esponenziazione ordinale, non cardinale).

Esercizio 3. Sia $n \in \omega$. Calcolare la cardinalità di $\mathcal{P}(\bigcup n)$ (le parti dell'unione di n).

Esercizio 4. Assumendo l'assioma di fondazione, consideriamo la funzione rango $\rho : V \rightarrow ON$. Per ciascuna delle seguenti affermazioni, stabilire se essa sia vera o falsa:

1. Se x è strettamente incluso in y , $\rho(x) < \rho(y)$;
2. Per ogni $x \in V$ esiste un insieme transitivo $y \supseteq x$ con lo stesso rango di x .
3. Se $\alpha < \rho(y)$ esiste $z \in y$ tale che $\rho(z) = \alpha$.

Esercizio 5. Per ciascuna delle seguenti disuguaglianze stabilire se esiste un insieme infinito X che la verifica: (a) $|\bigcup X| < |X|$; (b) $|\bigcup X| > |X|$; (c) $|\bigcup X| = |X|$.

Esercizio 6. Sia X un sottoinsieme più che numerabile di \mathbb{R} .

(i) Possiamo dire che necessariamente esiste un punto x di \mathbb{R} tale che ogni intorno aperto di x interseca X in un insieme più che numerabile?

(ii) Se X ha cardinalità 2^{\aleph_0} , possiamo dire che necessariamente esiste un punto x di \mathbb{R} tale che ogni intorno aperto di x interseca X in un insieme di cardinalità 2^{\aleph_0} ?

Esercizio 7. Esistono due sottoinsiemi disgiunti di ω_1 ciascuno dei quali abbia tipo d'ordine ω_1 ? Quanti al massimo ne riuscite a trovare?