Elementi di Teoria degli Insiemi

Alessandro Berarducci

Scritto del 4 luglio 2016

Esercizio 1. Esiste un insieme ordinato A di cofinalità $\aleph_{\omega_1}$?

Soluzione. No. Per ogni A abbiamo $cf(cf(A)) = cf(A)$. D'altra parte $cf(\aleph_{\omega_1}) = \omega_1 < \aleph_{\omega_1}$, quindi non può essere $cf(A) = \aleph_{\omega_1}$.

Esercizio 2. Esiste un ordinale $\alpha > 1$ tale che $\alpha^\alpha = \alpha$? (esponenziazione ordinale, non cardinale).

Soluzione. No. Se $\alpha \geq 2$ allora $\alpha^\alpha \geq \alpha^2 = \alpha \cdot \alpha \geq \alpha + \alpha > \alpha$. Alternativamente uso il fatto che x^y è strettamente crescente in y e scrivo $\alpha^\alpha > \alpha^1 = \alpha$.

Esercizio 3. Sia $n \in \omega$. Calcolare la cardinalità di $\mathcal{P}(\bigcup n)$ (le parti dell'unione di n).

Soluzione. Per $n > 0$ abbiamo $\bigcup n = n - 1$ e $|\mathcal{P}(\bigcup n)| = 2^{n-1}$. Per $n = 0$, $\bigcup n = 0$ e $|\mathcal{P}(\bigcup n)| = 1$.

Esercizio 4. Assumendo l'assioma di fondazione, consideriamo la funzione rango $\rho : V \to ON$. Per ciascuna delle seguenti affermazioni, stabilire se essa sia vera o falsa:

1. Se x è strettamente incluso in y, $\rho(x) < \rho(y)$;
2. Per ogni $x \in V$ esiste un insieme transitivo $y \supseteq x$ con lo stesso rango di x.
3. Se $\alpha < \rho(y)$ esiste $z \in y$ tale che $\rho(z) = \alpha$.

Soluzione. 1 Falso, basta prendere un sottoinsieme cofinale di ω.

2. Vero. Basta ricordare che $\rho(u)$ è il minimo α tale che $u \in V_{\alpha+1}$. Supponiamo che $\rho(x) = \alpha$. Allora $x \in V_{\alpha+1}$, quindi $x \subseteq V_\alpha$. Ora basta osservare che V_α è transitivo e ha rango $\alpha + 1$.

3. Falso. Prendo $y = \{\{0\}\}$ e osservo che y non ha elementi di rango 0.

Esercizio 5. Per ciascuna delle seguenti disuguaglianze stabilire se esiste un insieme infinito X che la verifica: (a) $|\bigcup X| < |X|$; (b) $|\bigcup X| > |X|$; (c) $|\bigcup X| = |X|$.

Soluzione. (a) Vero. Prendo $X = \mathcal{P}(\omega)$ e osservo che $\bigcup X = \omega$.

(b) Vero. Prendo $X = \{\mathbb{R}\} \cup \omega$.

(c) Vero. Prendo $X = \omega$.

Esercizio 6. Sia X un sottoinsieme più che numerabile di $\mathbb{R}$.

(i) Possiamo dire che necessariamente esiste un punto x di $\mathbb{R}$ tale che ogni intorno aperto di x interseca X in un insieme più che numerabile?

(ii) Se X ha cardinalità $2^{\aleph_0}$, possiamo dire che necessariamente esiste un punto x di $\mathbb{R}$ tale che ogni intorno aperto di x interseca X in un insieme di cardinalità $2^{\aleph_0}$?

Soluzione. (i) Vero. Per assurdo supponiamo che per ogni $x \in \mathbb{R}$ esista un intervallo (a, b) intorno ad x che interseca X in un insieme numerabile $X \cap (a, b)$. Restringendo l'intervallo posso prendere a, b razionali. Posso allora scrivere $X = \bigcup F$ dove F è la famiglia di tutti gli insiemi della forma $X \cap (a, b)$ tali che $|X \cap (a, b)| \leq \aleph_0$ e $a, b \in \mathbb{Q}$. Ne deduco che X è numerabile in quanto unione numerabile di insiemi numerabili.

(ii) Vero. Facendo la stessa costruzione scrivo $X = \bigcup F = \bigcup_{Y \in F} Y$ dove F è numerabile e ogni $Y \in F$ è un insieme della forma $X \cap (a, b)$ di cardinalità $< 2^{\aleph_0}$. Per König: $2^{\aleph_0} = |X| = |\bigcup_{Y \in F} Y| \leq \sum_{Y \in F} |Y| < \Pi_{Y \in F} 2^{\aleph_0} = (2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$, assurdo.

Esercizio 7. Esistono due sottoinsiemi disgiunti di ω_1 ciascuno dei quali abbia tipo d'ordine ω_1? Quanti al massimo ne riuscite a trovare?

Soluzione. Ne trovo ω_1. Ricordiamo che $\aleph_1 \cdot \aleph_1 = \aleph_1$, posso quindi fissare una bigezione $f : \omega_1 \times \omega_1 \to \omega_1$. Per ogni $a \in \omega_1$ sia $X_a \subseteq \omega_1$ l'immagine tramite f di $\omega_1 \times \{a\}$. Gli insiemi X_a sono disgiunti e di cardinalità ω_1, quindi sono illimitati in ω_1 e hanno tipo d'ordine ω_1.