Matematica Discreta e Algebra Lineare
9 Febbraio 2018

Cognome e nome: ....

Numero di matricola: .... Corso e Aula: ....

IMPORTANTE: Scrivere il nome su ogni foglio. Mettere **TASSATIVAMENTE** nei riquadri le risposte, e nel resto del foglio lo svolgimento. Punti 5 ad esercizio. Per alcuni esercizi potrà eventualmente essere attribuito un punto in più per valorizzare la qualità, la chiarezza, la precisione.

Esercizio 1. Si consideri l'applicazione lineare $F_a : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ che, rispetto alla base standard, ha matrice:

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 1 & a & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

1) Dire se l'applicazione è diagonalizzabile quando $a = 3$.
2) Dire se l'applicazione è diagonalizzabile quando $a = 4$.
3) Trovare, nel caso $a = 2$, un autovettore relativo all'autovalore 4.

Risposta 1: SI/NO	Risposta 2: SI/NO	Risposta 3: Autovettore

Esercizio 2. Risolvere le due congruenze del seguente sistema, e poi risolvere il sistema:

$$\begin{cases} x^4 \equiv 1 \pmod{55} \\ 3x^2 + x + 1 \equiv 0 \pmod{5} \end{cases}$$

Soluzioni prima cong.	Soluzioni seconda cong.	Soluzioni sistema

Esercizio 3. Trovare per quali valori di k si ha che

$$w = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} \in Span\left(\begin{pmatrix} 3 \\ k \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix} \right)$$

Valori di k

$\boxed{}$

Esercizio 4. SIa $X = \{1, 2, \ldots, 100\}$.

(1) Determinare il numero dei sottoinsiemi di due elementi $\{x, y\}$ di X in cui almeno uno fra x e y è pari.

(2) Determinare il numero dei sottoinsiemi di due elementi $\{x, y\}$ di X tali che $x + y$ è divisibile per 3.

Risposta 1	Risposta 2

Esercizio 5. Si consideri un'applicazione lineare $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tale che

$$L\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} \quad \text{e} \quad L\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix}$$

(1) Si scriva la matrice di L rispetto alla base standard di $\mathbb{R}^2$ (stessa base in partenza e in arrivo).

(2) Si scriva la matrice di L rispetto alla base $\left(\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}\right)$ (stessa base in partenza e in arrivo).

(3) Si scriva la matrice di L rispetto alla base $\left(\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}\right)$ in partenza e alla base $\left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right)$ in arrivo.

Risposta 1	Risposta 2	Risposta 3

Esercizio 6. Sia a un numero intero e sia

$$f(x) = x^3 + (a+2)x^2 - ax - 3.$$

(1) Determinare le radici razionali di $f(x)$ nel caso $a = 1$.
(2) Determinare tutti i valori di a per cui $f(x)$ ha almeno una radice razionale.
(3) Determinare tutti i valori di a per cui $f(x)$ ha tre radici razionali.

Risposta 1	Risposta 2	Risposta 3