Il Teorema “Never Two” di Vaught

Lorenzo Lami Rosario Mennuni

8 aprile 2014

1 Contesto

1.1 Ipotesi, notazioni e definizioni

Ipotesi 1.1. A meno di indicazione contraria, T sarà sempre una teoria:

- completa,
- in un linguaggio L tale che $|L| \leq \aleph_0$,
- munita di un modello infinito.

Notazione 1.2. Se $A \subset \mathcal{M} \models T$, indichiamo con L_A il linguaggio ottenuto aggiungendo a L un simbolo di costante c_a per ogni $a \in A$ e con $\mathcal{M}_A$ l'espansione di $\mathcal{M}$ a L_A-struttura ottenuta interpretando ogni c_a col rispettivo a. Se $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ e $(a_1, \ldots, a_n) = \bar{a}$ useremo la notazione $L_{\bar{a}}$ e $\mathcal{M}_{\bar{a}}$.

Notazione 1.3. Se $L^* \supset L$ e $\mathcal{M}$ è una L^*-struttura, indichiamo con $M \restriction L$ la sua restrizione a L.

Definizione 1.4. $I(T, \kappa)$ è il numero di modelli di T di cardinalità κ a meno di isomorfismo.

1.2 Modelli numerabili

Dato che L è per ipotesi numerabile e T ha un modello infinito[1], abbiamo $1 \leq I(T, \aleph_0) \leq 2^{\aleph_0}$. Nel 1961 Vaught formulò la seguente

Congettura 1.5 (Vaught)**.** $I(T, \aleph_0) > \aleph_0 \Rightarrow I(T, \aleph_0) = 2^{\aleph_0}$.

Questa è stata provata vera per le teorie ω-stabili da Shelah, ed è inoltre vero un enunciato più debole:

Teorema 1.6 (Morley)**.** $I(T, \aleph_0) > \aleph_1 \Rightarrow I(T, \aleph_0) = 2^{\aleph_0}$.

[1] Chiaramente se T è completa e ha un modello finito $I(T, \aleph_0) = 0$.

2 Non due

Vogliamo mostrare il seguente

Teorema 2.1 (Vaught "Never Two")**.** $I(T, \aleph_0) \neq 2$

2.1 Risultati noti

Richiamiamo i seguenti risultati visti nel corso:

Proposizione 2.2. Se $|S_n(T)| \leq \aleph_0$, allora i tipi isolati sono densi in $S_n(T)$.

Teorema 2.3. Sono equivalenti:

- T ha un modello primo.
- T ha un modello atomico.
- Per ogni n i tipi isolati sono densi in $S_n(T)$.

Teorema 2.4 (caratterizzazione delle teorie $\aleph_0$-categoriche)**.** Lsse:

- T è $\aleph_0$-categorica
- $\forall n \in \mathbb{N}$, tutti i $p \in S_n(T)$ sono isolati
- $\forall n \in \mathbb{N}$ $|S_n(T)| < \aleph_0$
- Ogni modello numerabile di T è atomico.

2.2 Dimostrazione del Teorema "Never Two"

Abbiamo bisogno di un po' di risultati preliminari:

Lemma 2.5 ("Dal grande al piccolo")**.** Se T ha un modello numerabile saturo ne ha anche uno primo.

Dimostrazione. Un modello saturo numerabile può realizzare al più una quantità numerabile di tipi, e quindi $|S_n(T)| \leq \aleph_0$. Dunque per la Proposizione 2.2 i tipi isolati sono densi in $S_n(T)$, e questo è equivalente al fatto che T abbia un modello primo per il Teorema 2.3. □

Lemma 2.6. Se per ogni n vale $|S_n(T)| \leq \aleph_0$, allora T ha un modello saturo numerabile.

Dimostrazione. Mostriamo preliminarmente che sotto le nostre ipotesi se $\mathcal{M} \models T$ è numerabile e $A = \{a_1, \ldots, a_m\} \subset M$, allora $|S_n^{\mathcal{M}}(A)| \leq \aleph_0$, perché possiamo immergere iniettivamente $S_n^{\mathcal{M}}(A)$ in $S_{n+m}^{\mathcal{M}}(\emptyset) = S_{n+m}(T)$, che è numerabile per ipotesi. Infatti un tipo $p(\bar{x}) \in S_n^{\mathcal{M}}(A)$ è realizzato da un certo $\bar{b}$ in una $\mathcal{N} \succ \mathcal{M}$, e possiamo quindi scrivere $p(\bar{x}) = \mathrm{tp}^{\mathcal{N}}(\bar{b}/A)$. Scrivendo $\bar{a} = (a_1, \dots, a_m)$, possiamo associare

$$\begin{array}{rcl} S_n^{\mathcal{M}}(A) & \to & S_{n+m}(T) \\ \mathrm{tp}^{\mathcal{N}}(\bar{b}/A) & \mapsto & \mathrm{tp}^{\mathcal{N}}(\bar{b}, \bar{a}) \end{array}$$

e questa mappa è iniettiva perché se $p \neq q$, allora esiste[2] $\psi(\bar{x}, \bar{a}) \in p$ tale che $\neg\psi(\bar{x}, \bar{a}) \in q$. Ma quindi l'immagine di p contiene $\psi(\bar{x}, \bar{y})$ e l'immagine di q contiene $\neg\psi(\bar{x}, \bar{y})$.

A questo punto basta ripercorrere la dimostrazione dell'esistenza di modelli $\aleph_0$-saturi usando la stima precedente per calcolare la cardinalità del modello costruito. Partiamo quindi da $\mathcal{M}_0 \models T$ numerabile, e costruiamo una catena elementare in cui in $\mathcal{M}_{i+1}$ sono realizzati, per ogni n, tutti gli n-tipi con parametri finiti da $\mathcal{M}_i$. Dato che i possibili insiemi di parametri sono numerabili per ipotesi induttiva, e che i possibili tipi da ogni insieme di parametri sono numerabili per la stima precedente, $\mathcal{M}_{i+1}$ può essere scelto di cardinalità numerabile tramite $\textsc{ls}\!\downarrow$ applicato alla $L \cup \{x_j \mid j \in \mathbb{N}\}$-teoria

$$\textsc{ed}(\mathcal{M}_i) \cup \bigcup_{j \in \mathbb{N}} p_j(x_j)$$

dove $\langle p_j \mid j \in \mathbb{N} \rangle$ è un'opportuna enumerazione di

$$\bigcup_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ m \in \mathbb{N}}} \bigcup_{\substack{A \subset M_i \\ |A| = m}} S_n^{\mathcal{M}_i}(A)$$

L'unione $\mathcal{M} = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{M}_i$ è numerabile, è un'estensione elementare di $\mathcal{M}_0$ (in particolare $\mathcal{M} \models T$), ed è satura per costruzione. $\square$

Lemma 2.7 ("Pochi ma buoni")**.** Se $I(T, \aleph_0) < 2^{\aleph_0}$, allora T ha un modello primo e un modello saturo numerabile.

Dimostrazione. Per i due Lemmi precedenti ci basta mostrare che $|S_n(T)| \leq \aleph_0$. Mostriamo che, se questo è falso, allora $|S_n(T)| = 2^{\aleph_0}$, e che quindi, dato che ogni tipo è realizzato in un modello di T numerabile, e che ognuno di questi ne realizza al più $\aleph_0$, devono esistere $2^{\aleph_0}$ modelli numerabili non isomorfi di T, contro le ipotesi.

Supponiamo quindi $|S_n(T)| > \aleph_0$. Dato che le formule sono numerabili, esiste φ tale che $|[\varphi]| > \aleph_0$, altrimenti lo spazio sarebbe unione numerabile di aperti numerabili. È sufficiente mostrare che per ogni φ tale che $|[\varphi]| > \aleph_0$ esiste sempre ψ tale che $|[\varphi \wedge \psi]| > \aleph_0$ e $|[\varphi \wedge \neg\psi]| > \aleph_0$: mostrato questo, infatti, possiamo costruire un albero binario di clopen di base disgiunti, e ogni ramo ha intersezione non vuota per compattezza, esattamente come nella dimostrazione della Proposizione 2.2, fornendo $2^{\aleph_0}$ tipi distinti.

[2] Ricordiamo che i tipi sono completi e deduttivamente chiusi.

Per assurdo, se una tale ψ non esistesse, l'insieme

$$p = \{\psi \mid |[\varphi \wedge \psi]| > \aleph_0\}$$

conterebbe per ogni ψ esattamente una fra ψ e $\neg\psi$. Mostriamo che p è finitamente soddisfacibile, cioè che p è un tipo. Se non lo fosse, esisterebbero[3] $\psi_1, \ldots, \psi_m \in p$ tali che anche $(\neg\psi_1 \vee \ldots \vee \neg\psi_m) \in p$. Ma, dato che

$$[\varphi \wedge (\neg\psi_1 \vee \ldots \vee \neg\psi_m)] = [\varphi \wedge \neg\psi_1] \cup \ldots \cup [\varphi \wedge \neg\psi_m]$$

allora uno dei $[\varphi \wedge \neg\psi_i]$ ha cardinalità non numerabile, ma avevamo detto che p non può contenere sia ψ_i che $\neg\psi_i$. Dunque p è un tipo. Ma, siccome se $\psi \notin p$ allora per definizione $|[\varphi \wedge \psi]| \leq \aleph_0$, otteniamo l'assurdo scrivendo l'aperto non numerabile $[\varphi]$, come unione numerabile di insiemi numerabili[4]

$$[\varphi] = \{p\} \cup \bigcup_{\psi \notin p} [\varphi \wedge \psi]$$

$\square$

Lemma 2.8 (Espansione-Saturazione)**.** Siano κ un cardinale infinito, $\mathcal{S}$ una L-struttura e $A \subset S$ tale che $|A| < \kappa$. Se $\mathcal{S}$ è κ-satura, anche $\mathcal{S}_A$ lo è.

Dimostrazione. Possiamo identificare in maniera naturale ogni $p \in S_n^{\mathcal{S}_A}(B)$ con un $\tilde{p} \in S_n^{\mathcal{S}}(A \cup B)$ semplicemente pensando le costanti di A come parametri. Se $|B| < \kappa$ anche $|A \cup B| < \kappa$, e se $\mathcal{S}$ è κ-satura ci sarà una n-upla $\bar{x}$ tale che $\mathcal{S} \models \tilde{p}(\bar{x})$. È allora ovvio dalle definizioni che $\mathcal{S}_A \models p(\bar{x})$. $\square$

Siamo ora pronti per dimostrare il risultato principale:

Dimostrazione del Teorema Never Two. Supponiamo $I(T, \aleph_0) = 2$. Per il Lemma "Pochi ma buoni" esistono $\mathcal{P} \models T$ primo e $\mathcal{S} \models T$ saturo. Dato che T non è $\aleph_0$-categorica, per il Teorema di caratterizzazione di queste esiste $q \in S_n(T)$ non isolato, che quindi è omesso in $\mathcal{P}$ ed è realizzato in $\mathcal{S}$ da un certo $\bar{a} \in S^n$. In particolare $\mathcal{P} \ncong \mathcal{S}$. Sia $T^* = \mathrm{Th}_{L_{\bar{a}}}(\mathcal{S}_{\bar{a}})$. Per il Lemma di Espansione-Saturazione anche $\mathcal{S}_{\bar{a}}$ è satura, e quindi per il Lemma "Dal grande al piccolo" esiste $\mathcal{M}^* \models T^*$ primo. Sia $\mathcal{M} = \mathcal{M}^* \restriction L$. Dato che $\mathcal{M}^* \models T^*$, $\mathcal{M}$ realizza q, per cui $\mathcal{M} \ncong \mathcal{P}$. Se fosse $\mathcal{M} \cong \mathcal{S}$ allora $\mathcal{M}$ sarebbe saturo e per il Lemma di Espansione-Saturazione lo sarebbe anche $\mathcal{M}^*$. Mostriamo che questo non può accadere.

Dato che T non è $\aleph_0$-categorica, per il Teorema di caratterizzazione $|S_n(T)| \geq \aleph_0$. Dato che ogni $p \in S_n(T)$ può essere associato iniettivamente a un $\hat{p} \in S_n(T^*)$ semplicemente completandolo, sempre per lo stesso Teorema T^* non è $\aleph_0$-categorica e ha un tipo non isolato che è quindi omesso in $\mathcal{M}^*$ perché è un suo modello primo. Dunque $\mathcal{M}^*$ non è saturo ed $\mathcal{M}$ è un terzo modello di T, non isomorfo né a $\mathcal{P}$ né a $\mathcal{S}$. $\square$

[3] Perché abbiamo appena detto che p è completo.

[4] Ricordiamo che le formule sono numerabili.

2.3 Esempi

Esempio 2.9 (Ehrenfeucht)**.** Siano $L = \{<\} \cup \{c_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ e

$$T = \text{DLO} \cup \{c_n < c_{n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$$

Questa teoria ha esattamente tre possibili modelli numerabili (a meno di isomorfismo), che etichetteremo come nella dimostrazione del Teorema Never Two e rappresenteremo come sottoinsiemi di $\mathbb{Q}$ con l'ordine indotto dove interpretiamo c_n come una successione crescente di razionali che tende a $\sqrt{2}$:

- $\mathcal{P}$ è il modello primo, dove la successione dei c_n è illimitata superiormente. Nella nostra rappresentazione è $(0, \sqrt{2})$.

- $\mathcal{M}$ è il modello "di mezzo", dove la successione ha sup. Nella nostra rappresentazione è $(0, \sqrt{2}) \cup [2, 3)$.

- $\mathcal{S}$ è il modello saturo, dove la successione è limitata ma *non* ha sup, e lo rappresentiamo come $(0, 3)$.

Infatti dato un qualunque modello numerabile di T, basta controllare se i suoi c_n sono illimitati/limitati con sup/limitati senza sup e usare la tecnica del va-e-vieni per costruire un isomorfismo con il modello appropriato esattamente come si fa per mostrare che DLO è $\aleph_0$-categorica.

Il tipo omesso in $\mathcal{P}$ è il tipo di un maggiorante dei c_n, cioè

$$q(x) = \{c_n < x \mid n \in \mathbb{N}\}$$

che è chiaramente realizzato negli altri due modelli. $\mathcal{M}$ non è saturo perché non realizza il tipo con un parametro

$$\{x < 2\} \cup \{c_n < x \mid n \in \mathbb{N}\}$$

Dunque per forza di cose $\mathcal{S}$ dev'essere saturo e $\mathcal{P}$ dev'essere primo perché l'esistenza di tali modelli è garantita dal Lemma "pochi ma buoni" (e il fatto che siano distinti segue dall'esistenza del tipo non isolato q) e basta quindi procedere per esclusione.

L'esempio può essere generalizzato fornendo una teoria con esattamente n modelli (per $n \geq 3$) aggiungendo $n - 2$ predicati 1-ari P_i al linguaggio, che pensiamo come "colori", e aggiungendo a T gli assiomi che ci assicurano che:

- I P_i colorano tutto il dominio[5].

- Ogni colore è denso.

[5] Cioè lo partizionano.

- La successione dei c_n è rossa[6].

In questo caso il modello $\mathcal{M}$ viene rimpiazzato da $n-2$ modelli $\mathcal{M}_i$ in cui il sup dei c_n è di colore i.

2.4 Non due volte

Si potrebbe essere tentati di "reiterare" la dimostrazione del Teorema, ottenendo un modello "di mezzo" $\mathcal{Q}$ anche per T^* che funga da "quarto modello" per T. Ripercorrendo la dimostrazione per T^* invece che per T, $\mathcal{Q}$ conterrà la realizzazione b di un certo tipo non isolato in $S_n(T^*)$. Nel caso in cui T abbia esattamente 3 modelli, $\mathcal{Q} \upharpoonright L$ deve chiaramente essere isomorfo a uno degli altri tre. Dato che realizza un tipo non isolato non può essere isomorfo a $\mathcal{P}$, e per il Lemma Espansione-Saturazione non può essere neanche isomorfo a $\mathcal{S}$. Quello che succede, quindi, è che b e a hanno tipi diversi in T^*, ma non in T. Nella nostra rappresentazione dell'esempio di Ehrenfeucht $a = 2$ e possiamo prendere $b = 3/2$. Nell'esempio con più colori invece $\mathbb{Q}$ potrebbe effettivamente appartenere ad una classe di isomorfismo diversa (a seconda del colore di $3/2$), ma al più alla $n-1$-esima iterazione ci troveremo per forza di cose con un sup di colore già considerato.

[6]Cioè per ogni n l'assioma $P_1(c_n)$.