LE DIREZIONI DELLA LOGICA IN ITALIA: LA TEORIA DEI MODELLI

ALESSANDRO BERARDUCCI E CARLO TOFFALORI

1. Introduzione

Il XXV incontro dell'Associazione Italiana di Logica e sue applicazioni (AILA), svoltosi a Pisa presso la Scuola Normale Superiore dal 14 al 17 aprile 2014, ha previsto nella giornata conclusiva una sessione speciale sulle "direzioni della ricerca logica in Italia". Nell'occasione il primo autore ha tenuto un intervento sulla teoria dei modelli di cui questa relazione rappresenta un ampliamento.

Tra le discipline in cui tradizionalmente viene suddivisa la logica matematica e che si riflette anche nell'articolazione dell'*Handbook of Mathematical Logic* [20], la teoria dei modelli è la più recente, posteriore quindi alla teoria della dimostrazione e alla teoria degli insiemi. Del resto si ritiene che il primo ad adoperare esplicitamente questa denominazione – teoria dei modelli – sia stato Alfred Tarski in una coppia di articoli del 1954 [151, 152]. Tornando all'Handbook, esso rimane a tutt'oggi una delle migliori introduzioni alla logica nel suo complesso, è quindi significativo che la sua prima edizione del 1977 preceda, seppure di un solo anno, la pubblicazione di quella che viene da molti considerata la più importante monografia nell'ambito della teoria dei modelli. Ci riferiamo alla monumentale *Classification Theory and the number of non-isomorphic models* di Saharon Shelah [146], la cui lettura è però meno consigliabile ai non addetti ai lavori.

Dai tempi del libro di Shelah, e ancor prima da quelli di Tarski, la teoria dei modelli ha continuato a crescere ed evolversi a ritmi elevati, sia per una naturale maturazione interna di idee e concetti, sia per le sollecitazioni derivanti da profonde interazioni con altri settori della matematica. Riesce quindi oggettivamente difficile rappresentarne oggi in poche pagine le variegate direzioni di ricerca. Ci siamo allora limitati in questo resoconto, dopo le necessarie sezioni introduttive, a una selezione abbastanza personale di temi, rinunciando all'obiettivo di trattare, o anche solo individuare, tutti quelli più significativi, concentrandoci piuttosto su quelli in cui sentivamo di poter dare un contributo più originale dal punto di vista espositivo. Ne è risultata una presentazione inevitabilmente sbilanciata. Ci scusiamo in anticipo per le sue omissioni, che coinvolgono talora anche la ricerca italiana. Per una panoramica più completa rimandiamo alle numerose monografie che, per nostra fortuna, sono disponibili sull'argomento, come [2, 35, 78, 114, 115, 127, 129, 154].

2. Nozioni preliminari: strutture e teorie

Pur nella diversità delle applicazioni la teoria dei modelli mantiene un'unità di metodi ed obiettivi, tanto che è possibile tentarne una definizione e identificarla come lo studio delle "strutture", con particolare attenzione a problemi di "definibilità" e classificazione. In altre parole,

Date: 31 gennaio 2015.

Key words and phrases. Model theory.

Lavoro svolto nell'ambito del PRIN 2012LZEBFL_002 "Logica, Modelli e Insiemi" e dello GNSAGA INDAM. .

- da un lato, data una struttura, se ne vogliono chiarire e capire i sottoinsiemi definibili;
- dall'altro, data una teoria, se ne intendono studiare, e se possibile classificare, i modelli.

Per meglio spiegare il duplice obiettivo, conviene però che spendiamo qualche capoverso per ricordare brevemente i concetti che vi sono coinvolti.

2.1. **Strutture e insiemi definibili.** Per **struttura** intendiamo semplicemente un insieme non vuoto (chiamato **dominio**) dotato di alcune funzioni e relazioni, ciascuna con un fissato numero di argomenti. Le usuali strutture algebriche (gruppi, anelli, campi, algebre di Boole, insiemi ordinati, grafi) sono esempi di strutture. Capita talora che una struttura ammetta elementi "più uguali" degli altri, come l'elemento neutro di un gruppo o lo zero e l'uno di un campo, e menzioni anche questi esplicitamente.

Come già anticipato, intendiamo considerare gli "insieme definibili" in una data struttura A. Ci muoviamo per questo all'interno della logica del primo ordine, facendo riferimento al **linguaggio** di A, cioè ai nomi, o "simboli", delle costanti, funzioni e relazioni della struttura, da eventuali **parametri** presi dal dominio di A, e dai cosiddetti **simboli logici**, i quali comprendono il simbolo di uguaglianza "$=$", i connettivi booleani (congiunzione "$\wedge$", disgiunzione "$\vee$", negazione "$\neg$"), le variabili, e i quantificatori universali "$\forall$" ed esistenziali "$\exists$". In questo linguaggio consideriamo le **formule del primo ordine** sintatticamente ben formate – per le definizioni precise il lettore può consultare [78] o qualsiasi manuale introduttivo di logica. Per **insieme definibile** in A intendiamo allora un sottoinsieme di qualche prodotto cartesiano A^n (identificando notazionalmente la struttura con il suo dominio) che sia descritto da una formula del primo ordine, nel senso che le n-uple di A^n che appartengono all'insieme sono esattamente quelle che soddisfano la formula all'interno della struttura A.

Un esempio di insieme definibile è, allora, quello formato dagli elementi invertibili x di un anello unitario R, che viene definito dalla formula "$\exists y(x \cdot y = 1)$" (cioè esiste un y che moltiplicato per x è uguale all'unità dell'anello). I simboli per la moltiplicazione $\cdot$ e l'unità 1 che compaiono nella formula fanno parte del linguaggio degli anelli unitari, mentre l'uguaglianza e il quantificatore esistenziale sono simboli logici.

Tra tutti gli insiemi definibili, riesce spesso interessante considerare il caso particolare degli **insiemi definibili senza quantificatori**. Ad esempio l'insieme degli elementi di ordine 2 di un gruppo (moltiplicativo) corrisponde a questa situazione, perché è definito dalla formula $x^2 = 1$ (si intende che x^2 abbrevia qui, come di consueto, $x \cdot x$). Similmente la circonferenza di raggio r è definita, nel campo dei numeri reali $\mathbb{R} = (\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1)$, dalla formula senza quantificatori $x^2 + y^2 = r^2$. Qui x, y sono le variabili libere, mentre r compare come parametro della definizione. Un semplice esercizio mostra che se r è razionale, o più in generale algebrico, la stessa circonferenza è definibile pure senza parametri, ossia utilizzando solamente i simboli del linguaggio degli anelli, quelli per addizione, moltiplicazione, zero e uno, oltre ai simboli logici.

In generale nella logica del primo ordine si assume che le variabili, quantificate o meno, presenti in una formula si riferiscano agli elementi del dominio di A. Una formula con n variabili "libere" (cioè non quantificate) definirà quindi un sottoinsieme di A^n nel modo sopra descritto. Se invece non vi sono variabili libere otteniamo una **formula chiusa**, o **enunciato**, che risulterà vero o falso in A a seconda delle caratteristiche algebriche di A. Il fatto che nella logica del primo ordine sia consentito quantificare solo sugli elementi, e non ad esempio sui sottoinsiemi della struttura, comporta ovviamente delle limitazioni al potere espressivo. Ad esempio non è possibile presentare al primo ordine il principio del minimo dei numeri naturali – secondo cui "ogni sottoinsieme non vuoto ha un minimo"– o la completezza dei numeri reali – per la quale "ogni sottoinsieme limitato superiormente ha un minimo confine superiore". La definizione assiomatica dei numeri naturali e dei numeri reali dovrà pertanto far ricorso alla logica del secondo ordine, o in ogni caso a logiche più espressive di quella del primo ordine.

Allo stesso modo si deve prendere atto che insiemi di vastissimo interesse per la matematica non risultano definibili nella logica del primo ordine. Per esempio il sottoinsieme di tutti gli elementi di ordine finito di un gruppo non è in generale definibile nel linguaggio della teoria dei gruppi, sebbene per ciascun ordine n prefissato, e in particolare, come abbiamo visto, per $n = 2$, sia definibile l'insieme degli elementi di ordine n.

Per passare a un esempio meno astratto e più "familiare" consideriamo l'insieme di tutti gli esseri umani, con la struttura determinata da qualche relazione parentale o coniugale. La relazione binaria "essere cugini di primo grado" è allora definibile (con un uso opportuno dei quantificatori) a partire dalla relazione "essere genitore di", al contrario della relazione "essere discendente di" che, per diventarlo, deve ricorrere a logiche più espressive di quella del primo ordine o limitare nel tempo il numero delle generazioni. A prescindere da questo caso particolare, prendiamo atto che, in genere, la chiusura transitiva di una relazione binaria definibile può non essere definibile.

D'altra parte lo studio di varie forme di definibilità con mezzi limitati ha origini antiche: basti ricordare il problema di risolvere certi problemi geometrici con l'uso esclusivo della riga e del compasso. Venendo a tempi più moderni, notiamo come pure i geometri algebrici siano in fin dei conti interessati a una particolare classe di insiemi definibili: quelli degli zeri di equazioni polinomiali. Lo studio della definibilità ha infine interesse per l'informatica teorica. La famosa questione se "P=NP", forse il problema più importante in questo ambito, è anch'essa formulabile in termini di definibilità nell'ambito della "teoria dei modelli finiti" – e questa nuova prospettiva stabilisce un approccio alla complessità computazionale alternativo al tradizionale ricorso alle macchine di Turing [85].

Esiste in realtà una parte della teoria dei modelli che si preoccupa di saggiare, per la costruzione delle formule, strumenti espressivi più potenti della tradizionale logica del primo ordine, come nuovi quantificatori oppure congiunzioni e disgiunzioni infinite, e ne valuta l'efficacia. Viene chiamata **teoria astratta dei modelli**. Le è dedicato, per esempio, [21], cui dunque rimandiamo, non senza aver ricordato l'apporto che a questi temi hanno dato in Italia Annalisa Marcja, Daniele Mundici, Sauro Tulipani e altri. Di Mundici citiamo in particolare i due contributi proprio a [21], ossia [117] e, in collaborazione con Janos Makowski, [101].

2.2. **Teorie.** Una **teoria** T di un dato linguaggio L è un insieme di formule chiuse di L, che vengono chiamate gli **assiomi** di T. Diremo che una teoria è **coerente** se ha almeno un **modello**, ovvero una struttura di L che ne verifica gli assiomi. Le **conseguenze logiche** di una teoria sono gli enunciati del suo linguaggio veri in tutti i suoi modelli. La nozione di "verità" può essere precisata facendo appello alla cosiddetta "semantica di Tarski" e non va confusa con il concetto di dimostrabilità. Tuttavia Gödel ha mostrato che un enunciato del primo ordine è conseguenza logica di una teoria se e solo se è dimostrabile dai suoi assiomi tramite opportune "regole di inferenza". Si tratta del cosiddetto "teorema di completezza" di cui è immediato corollario il "teorema di compattezza": un enunciato, che sia conseguenza degli assiomi di una teoria, lo è già di un sottoinsieme finito degli stessi.

Dal teorema di compattezza discende una gran varietà di risultati tutt'altro che banali, in logica ma anche in algebra. Solo per citarne uno: se un enunciato nel linguaggio dei campi vale in tutti i campi di caratteristica zero, esso deve valere pure in tutti i campi di caratteristica finita abbastanza grande. Tuttavia i due teoremi, quello di compattezza, e quindi anche quello di completezza nella sua formulazione più immediata, non si possono estendere alla logica del secondo ordine. Tornando per un attimo alla teoria astratta dei modelli, varrà anzi la pena di citare a questo proposito un famoso teorema di Lindström, secondo cui la logica del primo ordine può ritenersi, leibnizianamente, la "migliore possibile". Infatti essa è la sola che è anzitutto chiusa per negazione, congiunzione e quantificazione esistenziale e soddisfa poi il teorema di compattezza e un altro risultato fondamentale, cui accenneremo tra poco, ovvero il teorema di Löwenheim, Skolem e Tarski.

Per evitare equivoci, precisiamo che la "completezza" cui si fa riferimento nell'omologo teorema è una proprietà delle regole di inferenza e non della teoria. Esiste però anche una seconda accezione del termine, che si riferisce invece proprio alla teoria. Infatti una teoria T è detta **completa** se una qualsiasi formula chiusa nel suo linguaggio è dimostrabile dai suoi assiomi (cioè è vera in tutti i modelli) oppure è confutabile a partire da essi (e cioè è falsa in tutti i modelli). Ad esempio la teoria dei campi è incompleta in quanto non dimostra nè confuta il fatto che esista la radice quadrata di 2. Un esempio di teoria completa è invece la teoria dei campi algebricamente chiusi di una fissata caratteristica.

Dimostrare la completezza di una teoria non è in generale un compito facile. Esiste tuttavia un'intera classe di teorie che sono banalmente complete in base alla loro stessa definizione. Data una struttura A, possiamo infatti associare ad essa una teoria $Th(A)$, chiamata la **teoria completa** di A, i cui assiomi sono esattamente gli enunciati del primo ordine veri in A. Si tratta evidentemente di una teoria completa, sebbene in generale difetti di una delle caratteristiche desiderabili per una teoria: quella di conoscerne gli assiomi! Ad esempio non sappiamo se tra gli assiomi della teoria completa dei numeri naturali nel linguaggio con somma e prodotto figuri l'enunciato della congettura di Goldbach (che ogni numero pari maggiore di 2 è la somma di due primi): come dire che non sappiamo se la congettura sia vera o no.

Diremo allora che una teoria è **ricorsivamente assiomatizzata** se i suoi assiomi sono dati esplicitamente, o, più precisamente, se esiste un algoritmo per stabilire se un enunciato arbitrario del suo linguaggio è un suo assioma oppure no. Uno dei compiti del teorico dei modelli è cercare di capire se la teoria completa $Th(A)$ di una data struttura sia **ricorsivamente assiomatizzabile**, ovvero se equivalga ad una teoria ricorsivamente assiomatizzata, nel senso che ne condivida i modelli. Ad esempio sappiamo che la teoria completa $Th(\mathbb{C})$ del campo dei numeri complessi è ricorsivamente assiomatizzabile, in quanto equivale alla teoria dei campi algebricamente chiusi di caratteristica zero.

Dal teorema di completezza di Gödel si deduce che l'insieme delle conseguenze logiche di una teoria ricorsivamente assiomatizzata T è **semidecidibile**, ossia dispone di un algoritmo che, ricevuta una formula chiusa come input, si arresta dopo un numero finito di passi se questa è un teorema, e altrimenti diverge. L'algoritmo consiste semplicemente nel cercare in modo sistematico una dimostrazione formale di questa formula utilizzando gli assiomi e le regole di inferenza. Se inoltre la teoria T è pure completa, allora essa è **decidible**, ovvero ammette un algoritmo che, di ogni formula chiusa ricevuta come input, stabilisce se essa è o no un teorema – fermandosi in ogni caso. Dalla ricorsiva assiomatizzabilità della teoria completa $Th(\mathbb{C})$ segue allora l'esistenza di un algoritmo per stabilire se una formula chiusa qualsiasi della teoria degli anelli è vera o falsa in $\mathbb{C}$. Anche la teoria completa del campo $\mathbb{R}$ dei numeri reali è ricorsivamente assiomatizzabile, e quindi decidibile – ne presenteremo tra poco un insieme ricorsivo di possibili assiomi. Non sappiamo invece se questa proprietà si preservi quando al linguaggio di $\mathbb{R}$ si aggiunge la funzione esponenziale $x \to e^x$ e quindi $\mathbb{R}$ stesso è visto come campo esponenziale.

La teoria completa di $(\mathbb{N}, +, \cdot)$ non è invece decidibile, e quindi nemmeno ricorsivamente assiomatizzabile. In particolare gli "assiomi di Peano" non funzionano perchè sono del secondo ordine, e la loro variante del primo ordine è incompleta.

2.3. **Considerazioni metateoriche.** Dopo queste considerazioni preliminari, e prima di entrare veramente in argomento, ci preme effettuare una breve digressione relativa al quadro metateorico di riferimento. Il fatto che gli assiomi che caratterizzano i numeri naturali e reali non siano del primo ordine è uno degli argomenti addotti, contro la logica del primo ordine, dai fautori della "logica del secondo ordine", la quale ha però, come si diceva, altri difetti, tra cui la mancanza di un sistema completo di regole di inferenza. Come parziale risposta a queste obiezioni, osserviamo che, rimanendo al primo ordine, è pur sempre possibile dare una definizione dei numeri naturali e reali *relativamente* ad un fissato universo insiemistico. Ad esempio possiamo fissare come universo il livello $V_{\omega+\omega}$ della gerarchia cumulativa degli insiemi di von Neumann [1], considerato come struttura nel linguaggio della teoria degli insiemi (che consiste della sola relazione "$\in$" di appartenenza), e al suo interno dare una definizione *al primo ordine* di una copia isomorfa di $\mathbb{N}$ ed $\mathbb{R}$ (i quantificatori su *sottoinsiemi* di $\mathbb{N}$ o $\mathbb{R}$ diventando quantificatori su *elementi* dell'universo insiemistico), così come di praticamente tutti gli altri oggetti di interesse matematico. Naturalmente un approccio di questo genere non fa altro che spostare il problema di definire $\mathbb{N}$ ed $\mathbb{R}$ a quello di definire l'universo insiemistico di riferimento. Molti matematici, tuttavia, sono disposti ad assumere quest'ultimo come intuitivamente dato senza bisogno di una definizione, accontentandosi eventualmente di stabilire per esso degli opportuni assiomi del primo ordine (gli assiomi di Zermelo-Fraenkel) i quali, pur non caratterizzandolo a meno di isomorfismo, forniscono tutte le informazioni che in pratica ci servono. D'altronde, senza assumere nella "metateoria" qualche nozione insiemistica, non è neppure possibile definire il concetto di struttura.

3. Gli interi

La prima distinzione fondamentale da operare, quando si accosta una struttura dal punto di vista della teoria dei modelli, è se al suo interno si riesca a definire, o più in generale "interpretare" il semianello $\mathbb{N} = (\mathbb{N}, +, \cdot)$ dei numeri naturali o l'anello $\mathbb{Z} = (\mathbb{Z}, +, \cdot)$ degli interi. Infatti nei suoi famosi "teoremi di incompletezza" Gödel ha dimostrato che in $(\mathbb{N}, +, \cdot)$, si possono definire al primo ordine tutte le funzioni calcolabili (ad esempio il fattoriale o l'esponenziazione) e ne ha dedotto che la teoria completa $Th(\mathbb{N})$ dei naturali è **indecidibile**, cioè priva di un algoritmo capace di distinguere quali enunciati del primo ordine le appartengono, e quali no.

I medesimi risultati si trasmettono pure all'anello $\mathbb{Z} = (\mathbb{Z}, +, \cdot)$ degli interi. Infatti la struttura $(\mathbb{N}, +, \cdot)$ è definibile complessivamente in $\mathbb{Z}$: lo è il dominio $\mathbb{N}$, che coincide, per un classico teorema di Lagrange, con l'insieme delle somme di quattro quadrati in $\mathbb{Z}$, e lo sono l'addizione e la moltiplicazione di $\mathbb{N}$, in quanto restrizioni a $\mathbb{N}$ delle corrispondenti operazioni di $\mathbb{Z}$. In questo modo un eventuale algoritmo di decisione per $Th(\mathbb{Z})$ ne genera uno conseguente per $Th(\mathbb{N})$. Ma quest'ultimo è già escluso, e quindi pure $Th(\mathbb{Z})$ eredita l'indecidibilità di $Th(\mathbb{N})$.

Il precedente esempio spiega anche in quali casi una certa struttura si intende definibile in un'altra: ciò significa semplicemente che, a meno di isomorfismo, il dominio, le funzioni e relazioni della prima struttura risultano definibili nell'altra struttura. Esiste però un secondo modo di recuperare $\mathbb{Z}$ all'interno di $\mathbb{N}$, ossia

[1] Ci fermiamo al livello $\omega + \omega$ per non complicare il discorso con la distinzione tra insiemi e classi proprie.

quello, classico, di considerare un numero intero n come una coppia ordinata (a, b) di naturali rispetto alla relazione di equivalenza – definibile! – che va a determinare $a-b$. Anche le operazioni di addizione e moltiplicazione si definiscono modulo questa relazione. Si dice allora che $\mathbb{Z}$ è **interpretabile**, piuttosto che definibile, in $\mathbb{N}$. In generale la nozione di interpretabilità amplia quella di definibilità ammettendo la possibilità di formare quozienti rispetto a relazioni di equivalenza definibili. Un esempio di una coppia di strutture in cui la prima è interpretabile nella seconda ma non ivi definibile, è data ancora da $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$, ma questa volta dotate della sola struttura additiva, in modo che il teorema di Lagrange non risulti applicabile, pur rimanendo la possibilità di definire un intero come classe di equivalenza di una coppia di naturali.

Tornando al tema principale, una lunga serie di raffinamenti ha permesso di individuare classi di enunciati sempre più semplici per le quali continua a valere il risultato di indecidibilità di Gödel. E' in questo modo che, grazie ai contributi di Davis, Putnam, Julia Robinson e Matiyasevich, si è finalmente arrivati nel 1970 a una soluzione negativa del decimo problema di Hilbert, e cioè a escludere un algoritmo (o per essere più precisi un programma per macchine di Turing) per stabilire la risolubilità in $\mathbb{Z}$ di una equazione diofantea (si vedano [53] e [149] per resoconti aggiornati sull'argomento).

Il problema corrispondente per il campo $\mathbb{Q} = (\mathbb{Q}, +, \cdot, 0, 1)$ dei razionali è ancora aperto. In altre parole non sappiamo se esista un algoritmo per stabilire la risolubilità in $\mathbb{Q}$ di un'equazione diofantea. Tuttavia Julia Robinson ha dimostrato che il sottoanello $\mathbb{Z}$ dei numeri interi è definibile in $\mathbb{Q}$ (allo stesso modo in cui $\mathbb{N}$ lo è in $\mathbb{Z}$) e ne ha dedotto che pure la teoria completa di $\mathbb{Q}$ è indecidibile: non esiste un algoritmo per stabilire se un generico enunciato del primo ordine sia vero in $\mathbb{Q}$. La formula trovata dalla Robinson per definire $\mathbb{Z}$ in $\mathbb{Q}$ coinvolge quantificatori sia universali che esistenziali. Se si riuscisse a migliorare questo risultato individuando addirittura una formula esistenziale, si otterrebbe l'indecidibilità del decimo problema di Hilbert anche per $\mathbb{Q}$. Un recentissimo risultato di J. Koenigsmann[90] (vedi anche i commenti in [91]), pur non risolvendo il problema, è considerato un rafforzamento importante del risultato della Robinson, perchè individua una **formula universale** capace di definire $\mathbb{Z}$ in $\mathbb{Q}$ (ricordiamo che per "universale", o "esistenziale" si intende una formula che inizia con quantificatori rispettivamente universali o esistenziali seguiti da una sottoformula priva di quantificatori).

La dimostrazione dell'indecidibilità della teoria completa di $\mathbb{Q}$ illustra il fatto generale che ogni struttura che interpreta gli interi ha una teoria completa indecidibile. Da qui deriva l'importanza della distinzione con cui abbiamo aperto questa sezione.

Dai precedenti risultati si può anche dedurre che la teoria degli anelli, così come la teoria dei campi, è indecidibile: non esiste un algoritmo per stabilire se un enunciato del linguaggio degli anelli sia vero in tutti gli anelli, o in tutti i campi. In generale, infatti, se una teoria interpreta la teoria di $\mathbb{N}$ o di $\mathbb{Z}$ nel modo sopra descritto, allora ogni sua sottoteoria nello stesso linguaggio è indecidibile. Tanto vale evidentemente per la teoria dei campi, in quanto sottoteoria (incompleta) della teoria completa di $\mathbb{Q}$. Ciò non toglie che esistano, come già abbiamo accennato, campi la cui teoria completa è invece decidibile: così avviene per i numeri reali e per quelli complessi.

Proseguendo nelle generalizzazioni, è possibile mostrare che ogni teoria che interpreti una "parte significativa" (quindi anche incompleta) della teoria dei numeri interi, è indecidibile; basta riuscire a interpretare la cosiddetta "aritmetica di Robinson" (non Julia, ma suo marito Raphael). Una rassegna dei risultati di indecidibilità che si possono ottenere per questa via si può trovare in [153, 61]. In particolare, ricordando che gli interi sono definibili in termini insiemistici, si può dimostrare in questo modo che la teoria degli insiemi di Zermelo-Fraenkel è indecidibile. Inoltre, visto che gli assiomi della teoria di Zermelo-Fraenkel costituiscono un insieme decidibile, se ne deduce che la teoria degli insiemi è **incompleta**: esistono enunciati nel linguaggio della teoria che non sono nè dimostrabili nè confutabili a partire dagli assiomi. Il più famoso è "l'ipotesi del continuo". Non serve però aggiungerla, affermata o negata, come nuovo assioma, perchè una tale determinazione non farebbe che riprodurre l'imbarazzo di partenza, e cioè scoprire nuovi enunciati che sono motivo di indecidibilità e incompletezza. Questo genere di risultati mise la parola fine al sogno che Hilbert sviluppò agli inizi del XX secolo, di trovare un'assiomatizzazione completa per l'intera matematica.

Terminiamo il capitolo con una precisazione importante: i risultati di indecidibilità sin qui menzionati riguardano gli interi con somma e moltiplicazione. Se ci limitiamo alla struttura additiva, otteniamo invece una teoria decidibile. Più precisamente la teoria completa di $(\mathbb{N}, +)$ (la cosiddetta **aritmetica di Presburger**), così come quella di $(\mathbb{Z}, +)$, o anche quella di $(\mathbb{Z}, +, <)$, è decidibile.

4. Eliminazione dei quantificatori

I risultati di indecidibilità che abbiamo discusso nella sezione precedente provengono in ultima istanza dai teoremi di incompletezza di Gödel e sono di carattere, per così dire, "negativo". Non è però in questo ambito che si trovano gli effetti più caratteristici della teoria dei modelli, che sono invece spesso di segno opposto, cioè positivo, e corrispondono a teoremi di classificazione, regolarità, docilità eccetera. Le strutture cui si riferiscono non interpretano dunque in alcun modo l'anello degli interi. I primi esempi significativi a loro riguardo sono costituiti dal campo dei numeri reali $\mathbb{R}$ e dal campo dei numeri complessi $\mathbb{C}$. Stiamo quindi affermando che, a differenza di quanto avviene per $\mathbb{Q}$, il sottoanello $\mathbb{Z}$ degli interi non è definibile (al primo ordine) nè in $\mathbb{R}$ nè in $\mathbb{C}$ a partire dalle operazioni di campo. Questa povertà espressiva è il prezzo da pagare per ottenere i buoni esiti che stiamo per illustrare.

Consideriamo dapprima il caso di $\mathbb{R}$. Qui il risultato fondamentale è un teorema di **eliminazione dei quantificatori** provato da Alfred Tarski negli anni '30 del XX secolo, ma pubblicato solo dopo la guerra. Esso afferma che, se oltre alle operazioni di campo, mettiamo nel linguaggio anche l'ordine, considerando quindi $\mathbb{R}$ come struttura nel linguaggio $L = \{0, 1, +, \cdot, <\}$, allora ogni insieme che risulta definibile in $\mathbb{R}$ lo è già grazie a una formula senza quantificatori. La rilevanza di una simile conclusione è facile da percepire, se si considera come le definizioni che coinvolgono molti quantificatori, e molte alternanze di quantificatori esistenziali e universali, sono di conseguenza assai poco perspicue: in genere tre o quattro quantificatori universali ed esistenziali che si avvicendano tra loro sono già sufficienti per generare formule di difficile comprensione perfino per un matematico esperto.

E' giusto sottolineare che il teorema di Tarski si poggia imprescindibilmente sulla presenza nel linguaggio di un simbolo "$<$" per la relazione d'ordine. Per apprezzarne l'importanza basta osservare come l'insieme dei reali non negativi, che si definisce agevolmente con la formula senza quantificatori $x = 0 \vee 0 < x$, si può anche ricavare, trascurando l'ordine, come l'insieme dei quadrati, che è definito dalla formula $\exists y(y^2 = x)$, ma solo al prezzo, che si dimostra inevitabile, di un scomodare un quantificatore esistenziale.

Il teorema di eliminazione dei quantificatori assicura poi che ogni insieme definibile in $\mathbb{R}$ è una combinazione booleana di insiemi definibili da equazioni e disequazioni polinomiali – in n variabili, se consideriamo sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n$. Gli insiemi che si vengono così a formare hanno evidente rilevanza pure in geometria algebrica, dove vengono chiamati "semialgebrici".

Come $\mathbb{R}$, così anche il campo complesso $\mathbb{C}$ soddisfa un teorema di eliminazione dei quantificatori: come conseguenza implicita del teorema di Tarski su $\mathbb{R}$, si deduce che ogni insieme definibile in $\mathbb{C}$ è combinazione booleana di varietà algebriche, dunque di insieme di zeri di equazioni polinomiali, e quindi gli insiemi definibili corrispondono a quelli che i geometri algebrici chiamano costruibili.

Talora l'eliminazione dei quantificatori si ottiene in modo solo parziale ma non per questo meno illuminante: capita cioè che la classe delle formule a cui ci si restringe non si limiti a quelle mancanti di quantificatori, ma si allarghi ad altre, semplici, tuttavia, e ben delineate. Tanto accade alla teoria dei moduli (sinistri) su un fissato anello unitario R. Rientrano dunque in questo ambito sia i gruppi abeliani, visti come moduli su $\mathbb{Z}$, che gli spazi vettoriali su un campo. Il linguaggio per i moduli su R estende quello $\{+, 0\}$ dei gruppi abeliani additivi aggiungendogli un simbolo di operazione 1-aria per ogni elemento $r \in R$, a rappresentare la moltiplicazione scalare per r. Non c'è allora da aspettarsi eliminazione piena dei quantificatori. Per esempio, l'insieme dei multipli di 3 è definibile in uno $\mathbb{Z}$-modulo tramite la formula $\exists y(3y = x)$, ma non c'è verso di ottenerlo senza adoperare quantificatori. Esaminiamo però proprio la formula $\exists y(3y = x)$ e osserviamo che a soddisfarla sono in $\mathbb{Z}$ quegli interi che, sostituiti a x, rendono risolubile (rispetto a y) l'equazione lineare $3y = x$, quindi appunto i multipli di 3. Consideriamo in generale, su un arbitrario anello R, un sistema lineare di equazioni della forma

$$r_1x_1 + \ldots + r_nx_n + s_1y_1 + \ldots s_my_m = 0$$

dove $y_1, \ldots, y_m$ rappresentano le indeterminate del sistema, $x_1, \ldots, x_n$ una seconda stringa di variabili che giocano il ruolo di parametri, e i vari $r_1, \ldots, r_n$, $s_1, \ldots, s_m$ elementi di R. Associamogli la formula che assicura l'esistenza di una soluzione $y_1, \ldots, y_m$. A soddisfarla in un dato modulo M su R sono dunque le stringhe di elementi $x_1, \ldots, x_n$ che rendono il sistema risolubile in M. Un classico teorema di Baur e Monk assicura che su un qualsiasi anello R ogni formula del linguaggio dei moduli su R è equivalente a una combinazione booleana di formule, se non proprio senza quantificatori, almeno del tipo appena descritto (e di certi enunciati a esse nuovamente collegati).

Le formule in questione si chiamano *positive primitive*, in breve pp-formule. Il teorema di eliminazione dei quantificatori relativo alla loro classe è alla base di gran parte dei risultati della teoria dei modelli dei moduli. Tra le varie questioni che gli si collegano sta il problema di stabilire, per un fissato anello (contabile) R, se la teoria degli R-moduli è o no decidibile. La risposta è varia, dipende infatti, come è lecito attendersi, dalla scelta di R: è dunque positiva se $R = \mathbb{Z}$, o $R = \mathbb{Q}$, o R è l'anello dei polinomi a coefficienti in $\mathbb{Q}$ e in una indeterminata, ma diventa negativa non appena si passa a polinomi su $\mathbb{Q}$ in cui le indeterminate sono 2. Vedremo a fine articolo il perché.

5. Elementare equivalenza

Date due strutture A e B nello stesso linguaggio L, si dice che A è **elementarmente equivalente** a B se A e B verificano gli stessi enunciati del primo ordine del comune linguaggio L, ovvero se A e B hanno la stessa teoria completa. La nozione di elementare equivalenza è di fondamentale importanza in teoria dei modelli. E' semplice osservare che due strutture isomorfe sono anche elementarmente equivalenti. Il contrario però non è vero: non è difficile individuare due modelli che differiscono per qualche proprietà strutturale (e quindi non sono isomorfi), e tuttavia sono elementarmente equivalenti perchè gli enunciati del primo ordine non sanno cogliere ed esprimere questa difformità. Del resto un famoso risultato di Löwenheim, Skolem e Tarski, una delle pietre miliari della teoria classica dei modelli – già accennato qualche pagina fa in relazione al teorema di Lindström –, afferma che una teoria provvista di almeno un modello infinito ha di conseguenza modelli in ogni cardinalità infinita, come tali a due a due non isomorfi. In verità la teoria può raggiungere talora in ogni cardinalità infinita λ fino a 2^λ modelli non isomorfi di potenza λ: è questo, per esempio, il caso della teoria completa del campo reale. Una parentesi relativa al teorema di Lindström: la proprietà di Löwenheim-Skolem-Tarski che vi figura è una versione più debole di quella appena enunciata, assicurando per ogni insieme contabile di enunciati dotato di modello l'esistenza di un modello contabile, cioè finito o numerabile. A proposito: qui e altrove chiamiamo **numerabile** un insieme di cardinalità $\aleph_0$ e **contabile**, come appena detto, un insieme numerabile oppure finito.

Dalle precedenti definizioni si deduce immediatamente che una teoria è completa se e solo se i suoi modelli sono tutti elementarmente equivalenti tra di loro.

Dai risultati di Tarski segue poi che le strutture elementarmente equivalenti a $\mathbb{C}$ sono esattamente i campi algebricamente chiusi di caratteristica zero, mentre quelle elementarmente ad $\mathbb{R}$ sono esattamente i campi reali chiusi – intendiamo quei campi ordinati $\mathbb{K}$ in cui ogni polinomio $p(x) \in \mathbb{K}[x]$ che cambia segno tra due punti $a < b$ di $\mathbb{K}$ ammette uno zero in $\mathbb{K}$ tra a e b. In particolare $Th(\mathbb{C})$ e $Th(\mathbb{R})$ sono ricorsivamente assiomatizzabili e quindi decidibili, sebbene i risultati di decidibilità ottenuti per questa via, e cioè passando per la ricorsiva assiomatizzabilità, non forniscano di per sè algoritmi espliciti di decisione, nè tanto meno stime precise sulla complessità di simili algoritmi - obiettivi per i quali conviene invece ripercorrere i passi della dimostrazione costruttiva dell'eliminazione dei quantificatori.

Altre notevolissime conseguenze dell'elementare equivalenza sono presentate nel già citato *Handbook of Mathematical Logic* [20]. Ci pare doveroso ricordare qui almeno il teorema di Ax, Kochen ed Ershov secondo cui due campi valutati Henseliani di caratteristica residua zero sono elementarmente equivalenti se e solo se lo sono i loro campi residui e i loro gruppi dei valori, tanto più che questo risultato si applica fruttuosamente a problemi diofantei sui numeri p-adici e produce in particolare una soluzione asintotica – la migliore possibile – di una classica congettura di Artin: per ogni scelta di interi positivi n, d, esiste un primo P dipendente da n e d tale che, per ogni primo $p > P$, ogni polinomio omogeneo sul campo p-adico $\mathbb{Q}_p$ di grado d e con n variabili ammette per $n > d^2$ almeno uno zero non banale in $\mathbb{Q}_p$. Un resoconto recente di tutti questi argomenti si trova in [55]. In caratteristica residua diversa da zero la situazione è più complessa, ma ci sono risultati analoghi cui hanno contribuito anche ricercatori Italiani [63].

Prima di concludere il capitolo, citiamo ancora un famoso problema di Tarski, che domandava se due gruppi liberi con almeno due generatori sono sempre elementarmente equivalenti. Zlil Sela risolse positivamente la questione in [143] con un autentico *tour de force*. Esiste dunque una teoria completa i cui modelli includono tutti i gruppi liberi con almeno due generatori. E' stato dimostrato che una tale teoria è pure decidibile [88].

6. Model completezza

Strettamente collegata alla nozione di elementare equivalenza è quella di "sottostruttura elementare". Il concetto più generale di **sottostruttura** ha una connotazione sostanzialmente algebrica ed estende in modo naturale casi familiari come sottogruppi e sottoanelli. Stabilisce infatti, per A, B modelli di un comune linguaggio L, che A sia sottostruttura di B se il dominio di A è incluso in quello di B e l'inclusione preserva in ambo i sensi l'interpretazione delle funzioni, relazioni e costanti di L. La nozione di **sottostruttura elementare** ha invece una più marcata matrice logica, perchè, se riferita ad A e B come sopra, richiede in aggiunta che, per ogni formula del primo ordine ϕ di L con variabili libere $x_1, \ldots, x_n$, il sottoinsieme di A^n definito da ϕ in A coincida con la traccia in A^n del sottoinsieme di B^n definito dalla medesima formula in B. In altre parole, un enunciato del primo ordine a parametri in A è vero in A se e solo se è vero in B. Chiaramente, se A è una sottostruttura elementare di B, allora è anche elementarmente equivalente a B: per convincersene, basta applicare la definizione generale al caso di enunciati senza parametri. Tuttavia l'implicazione contraria non è vera: una sottostruttura A di B può essere elementarmente equivalente a B senza con ciò essere una sottostruttura elementare. Un esempio è dato dall'inclusione dei numeri pari all'interno dei numeri interi, considerati entrambi come ordini totali: la formula con parametri che asserisce l'esistenza di un elemento intermedio tra 2 e 4 è vera negli interi ma non nei numeri pari. D'altra parte la funzione che associa a ogni intero pari la sua metà è invece un isomorfismo tra le due strutture, che di conseguenza sono pure elementarmente equivalenti.

Una teoria T si dice **model completa** se, comunque fissati due suoi modelli A e B, il primo sottostruttura dell'altro, A risulta essere sottostruttura elementare di B. Esistono altre caratterizzazioni equivalenti di questo concetto. Si prova per esempio che T è model completa se e solo se ogni formula del suo linguaggio si rivela equivalente a una formula esistenziale. Dunque ogni insieme definibile in un modello di T lo è anche grazie a una formula esistenziale - in termini geometrici, è la proiezione lungo opportuni assi coordinati di un insieme definibile senza bisogno di quantificatori.

E' in effetti evidente che la model completezza è una proprietà più debole della eliminazione dei quantificatori, in quanto una formula priva di quantificatori è anche esistenziale. In particolare la teoria dei campi reali chiusi e la teoria dei campi algebricamente chiusi (a prescindere stavolta dalla caratteristica, perchè due campi di cui uno è sottostruttura dell'altro chiaramente la condividono) sono entrambe model complete.

Da questi risultati di model completezza segue in particolare che, dati due campi algebricamente chiusi A e B, con A sottostruttura di B, ogni sistema di equazioni (e disequazioni) polinomiali a coefficienti in A è risolubile in B se e solo se è risolubile in A. L'etichetta stessa di campo "algebricamente chiuso" sottolinea questa proprietà nel caso di singoli polinomi in una sola indeterminata. La proprietà generale, per sistemi di più polinomi in più variabili, corrisponde al classico teorema degli zeri di Hilbert. La model completezza dei campi algebricamente chiusi può quindi essere considerata come un rafforzamento di questo risultato.

Questi contatti tra teoria dei modelli e algebra (o geometria algebrica) sono sviluppati in classici testi [139, 140] di Abraham Robinson, l'inventore dell'analisi non standard [141] (soltanto omonimo di Julia e Raphael). Robinson ne ricavò, nel caso dei campi reali chiusi, una dimostrazione chiara e diretta della soluzione positiva del diciassettesimo problema di Hilbert. Quest'ultimo chiedeva se una funzione razionale in più variabili $x_1, \ldots, x_n$ su $\mathbb{Q}$ o su $\mathbb{R}$ che è definita positiva, nel senso che assume su $\mathbb{Q}$ o su $\mathbb{R}$ solo valori non negativi, è per questo una somma di quadrati in $\mathbb{Q}(x_1, \ldots, x_n)$ o $\mathbb{R}(x_1, \ldots, x_n)$. Una risposta affermativa fu ottenuta da Artin e Schreier, che proprio per questo motivo elaborarono la nozione di campo ordinato reale chiuso. La successiva prova di Robinson sottolinea il ruolo chiave che a questo proposito è svolto dalla model completezza.

Una bellissima introduzione alla model completezza fino agli anni Settanta si trova nel contributo di Macintyre [97] all'Handbook [20]. Per venire a tempi più recenti, non possiamo certo trascurare il teorema di Alex Wilkie [161] secondo cui la teoria completa di $\mathbb{R}_{\exp} = (\mathbb{R}, +, \cdot, \exp)$ – l'espansione del campo dei numeri reali con la funzione esponenziale $x \to e^x$ – è anche model completa. Si tratta infatti di un risultato rimarchevole sotto tanti punti di vista, che citiamo qui quasi di sfuggita ma su cui presto torneremo.

7. CATEGORICITÀ

Consideriamo in un linguaggio contabile del primo ordine una teoria completa T che ammette qualche modello infinito, e quindi modelli in ogni cardinalità infinita. Diciamo che T è κ-categorica, per κ cardinale infinito, se tutti i suoi modelli di cardinalità κ sono tra loro isomorfi. Per esempio

- un insieme infinito è determinato a meno di corrispondenze biunivoche (e dunque, in assenza di ulteriore struttura, a meno di isomorfismi) dalla sua cardinalità;
- altrettanto può dirsi di uno spazio vettoriale infinito su un campo finito $\mathbb{F}$, perchè la sua dimensione su $\mathbb{F}$ coincide con la sua cardinalità; su $\mathbb{Q}$ le cose sono leggermente più complicate, perchè ad $\aleph_0$ corrispondono più possibili dimensioni da 1, 2, ... allo stesso $\aleph_0$, tuttavia per κ più che numerabile, cardinalità κ e dimensione coincidono anche su $\mathbb{Q}$;
- un campo algebricamente chiuso di fissata caratteristica è completamente determinato a meno di isomorfismi dal suo grado di trascendenza sul sottocampo minimo, e il grado di trascendenza coincide con la cardinalità non appena diventa più che numerabile.

La conclusione è che la teoria degli insiemi infiniti è categorica in ogni cardinalità κ, così come la teoria degli spazi vettoriali infiniti su un campo finito, mentre la teoria degli spazi vettoriali non nulli su $\mathbb{Q}$ e quella dei campi algebricamente chiusi di una fissata caratteristica sono categoriche in ogni $\kappa > \aleph_0$. Ci sono poi esempi di teorie che non sono categoriche in nessuna cardinalità, come quella dei campi reali chiusi, oppure categoriche in $\aleph_0$ e non in altre cardinalità, come quella degli ordini lineari densi senza estremi – infatti un classico teorema di Cantor assicura che, a meno di isomorfismi, l'unico modello numerabile di questa teoria è l'ordine dei razionali.

Un teorema fondamentale di Morley del 1965 prova che gli esempi proposti esauriscono tutti i casi possibili: se una teoria completa T in un linguaggio contabile del primo ordine è categorica in *qualche* cardinalità più che numerabile, allora è categorica in *ogni* cardinalità più che numerabile. La dimostrazione di Morley introduce uno strumento che si rivelerà basilare nella teoria dei modelli degli anni successivi: una misura di complessità degli insieme definibili, che oggi si chiama proprio **rango di Morley**. I suoi valori sono numeri ordinali, o ∞, e sono accompagnati nel primo caso da un numero intero positivo – il **grado di Morley**. Per una varietà algebrica V sul campo complesso $\mathbb{C}$, il rango di Morley coincide con la dimensione e il grado col numero delle componenti irriducibili di V della sua stessa dimensione. Così rango e grado di Morley contribuiscono ad approfondire il collegamento tra teoria dei modelli e geometria algebrica gia più volte sottolineato.

Il lavoro di Morley ispirò anche il formidabile programma di classificazione che Shelah elaborò negli anni successivi. Per introdurlo, consideriamo le teorie complete T che risultano più semplici dal punto di vista di Morley, escludendo ovviamente quelle che hanno modelli finiti. Otteniamo allora le teorie T che hanno rango e grado 1, condizione che si traduce in termini elementari affermando che ogni sottoinsieme di un modello di T definibile (da una formula con una sola variabile libera) è finito oppure cofinito. Una teoria T con questa proprieà si dice **fortemente minimale**. L'apparente banalità della sua caratterizzazione non deve trarre in inganno, perché si coniuga con esempi algebricamente rilevanti. Anzi, se riprendiamo la lista di teorie categoriche di qualche capoverso fa, scopriamo che gli spazi vettoriali su un campo (contabile) e i campi algebricamente chiusi, in particolare il campo complesso

$\mathbb{C}$, hanno teorie fortemente minimali, insieme peraltro agli insiemi infiniti. Del resto, questa evidente semplicità dei sottoinsiemi del dominio di una struttura A definibili in A non deve automaticamente trasmettersi a insiemi definibili di coppie, o terne, o n-uple di elementi di A; per esempio sappiamo bene come, in questo ambito esteso, gli insiemi definibili in un campo algebricamente chiuso includono le varietà algebriche e coincidono con i costruibili.

Baldwin e Lachlan [4] mostrarono come le teorie fortemente minimali T rientrino tra quelle categoriche in ogni cardinalità più che numerabile, e ne costituiscano anzi in un senso opportuno il fondamento. La classe di isomorfismo di un loro modello più che numerabile è quindi ovviamente individuato da un invariante cardinale - appunto, la cardinalità di quel modello. Ma anche per un modello numerabile basta un solo numero cardinale a determinare il tipo di isomorfismo: $\aleph_0$ stesso se T è categorica anche in $\aleph_0$, come succede agli insiemi infiniti, e altrimenti un valore tra 1, 2, ..., $\aleph_0$, come accade agli spazi vettoriali su $\mathbb{Q}$ grazie alla dimensione, oppure ai campi algebricamente chiusi grazie al grado di trascendenza. Zilber [164] congetturò anzi che ogni teoria fortemente minimale si comporta come uno di questi tre casi fondamentali.

La teoria della classificazione di Shelah [146] estende l'analisi dal caso fortemente minimale allo scenario generalissimo di un'arbitraria teoria completa del primo ordine T (in un linguaggio contabile), con l'obiettivo

- di descriverne tutti i modelli (a meno di isomorfismi) tramite l'assegnazione di opportuni invarianti, quali numeri cardinali, o stringhe di cardinali, o qualcosa di ancor più complicato,
- oppure di provare per T l'inattuabilità di una simile caratterizzazione.

Argomenti di combinatorica infinita portano Shelah a escludere un'attribuzione di invarianti nel caso in cui T ammetta in ogni cardinalità più che numerabile κ il massimo numero di modelli non isomorfi, ovvero 2^κ. Muovendo da questo punto di vista, Shelah individua per T una serie di proprietà cruciali, che assicurano successivamente a T, quando le rispetta, buone nozioni di indipendenza, dimensione e via dicendo e, quando le disattende, l'eccesso di modelli che impedisce la classificazione.

8. STABILITÀ

La prima di queste nozioni fondamentali è, nel programma di Shelah, la **stabilità**. Una sua possibile caratterizzazione è la seguente: una teoria T è stabile quando nessuna formula del suo linguaggio sa definire in qualche suo modello un ordine totale infinito. In particolare nessuna teoria di strutture totalmente ordinate può essere stabile. Da un lato, come già anticipato, una teoria instabile possiede troppi modelli per consentirne una classificazione. Dall'altro una teoria stabile ammette una nozione astratta di indipendenza con ottime proprietà, tali da generalizzare per molti versi l'indipendenza algebrica dei campi o quella lineare dei vettori. Ogni teoria categorica in una cardinalita più che numerabile, in particolare ogni teoria fortemente minimale, è stabile. Un'altra classe di esempi notevoli di teorie stabili è costituita dalle teorie complete di moduli su un fissato anello unitario R, a prescindere dalla scelta di R.

La capacità di individuare e sviluppare nozioni astratte che poi, applicate a esempi concreti, manifestano un chiaro significato geometrico è un aspetto non marginale del lavoro di Morley e Shelah. Questo approccio geometrico fu poi approfondito da Hrushovki e Zilber, per esempio nello studio delle cosiddette *geometrie di Zariski* [166]. La loro genesi è la seguente. Dapprima Hrushovski confutò la congettura di Zilber sulle teorie fortemente minimali, producendo un nuovo esempio, non assimilabile nè a insiemi, nè a spazi vettoriali, nè a campi algebricamente chiusi, e per molti versi ancora da afferrare e intendere compiutamente. Ma lo stesso Hrushosvki, insieme proprio a Zilber [84], mostrò che la congettura resta valida se considerata appunto nell'ambito delle geometrie di Zariski. Queste ultime sono strutture dotate però di una topologia, che generalizza quella di Zariski per le varietà algebriche. Si prova allora che ogni geometria di Zariski non banale

- deriva da uno spazio vettoriale oppure
- risulta bi-interpretabile con un campo algebricamente chiuso – nel senso che l'una definisce l'altro, e viceversa, a meno di passaggio al quoziente rispetto a una relazione di equivalenza, anch'essa definibile.

Non a caso allora, commentando questi sviluppi, Wilfrid Hodges coniò in quegli anni lo slogan *"teoria dei modelli = geometria algebrica senza campi"* [78]. Hrushovski contribuì ad accreditarlo ulteriormente con la sua dimostrazione con metodi di teoria dei modelli di un classico problema di geometria algebrica, la *congettura di Mordell-Lang* nel suo caso più generale, su campi di funzioni (1996) [33, 80].

A proposito di stabilità, un resoconto che, come il nostro, intende ripercorrere la ricerca logica in Italia non può certamente dimenticare i tre convegni successivi che proprio su *Stability in Model Theory* Annalisa Marcja organizzò a Trento tra il 1987 e il 1991, con una larghissima partecipazione internazionale. Annalisa Marcja e Piero Mangani svilupparono in quegli stessi anni un loro originale approccio ai temi della categoricità e della classificazione, cui più tardi collaborò anche Carlo Toffalori ([104, 105, 107, 110, 111, 112, 156]). L'indagine muoveva dalla premessa che i sottoinsiemi definibili di una struttura A costituiscono un'algebra di Boole, sottoalgebra del campo completo di tutti i sottoinsiemi di A, e si domandava quanta informazione su una teoria completa T in un linguaggio contabile si potesse ottenere dai tipi di isomorfismo delle algebre di Boole dei sottoinsiemi definibili dei suoi modelli. E' chiaro che una teoria categorica in qualche cardinalità infinita κ ammette in κ un'unica classe di isomorfismo di queste algebre di Boole. Non vale tuttavia il contrario, per esempio sappiamo esistere $2^{\aleph_0}$ campi reali chiusi numerabili a due a due non isomorfi, ma si dimostra che essi condividono tutti, a meno di isomorfismi, la stessa algebra di Boole dei sottoinsiemi definibili. Lo stesso accade anche alla teoria completa di ogni modulo. Da un altro punto di vista, ogni teoria categorica in un cardinale κ più che contabile possiede un solo tipo di isomorfismo di algebre di Boole di sottoinsiemi definibili di modelli numerabili.

9. O-minimalità

Come abbiamo visto, le teorie instabili, e in particolare le teorie complete di strutture totalmente ordinate infinite, non sono classificabili nel senso di Shelah perché troppo ricche di modelli. Tuttavia queste strutture includono casi estremamente interessanti per i matematici, e per di più dotati di buone nozioni di dimensione e dipendenza. Consideriamo per esempio il campo ordinato dei reali $\mathbb{R}$ e la geometria algebrica che vi si sviluppa. Si noti a suo proposito che, come conseguenza del teorema di eliminazione dei quantificatori di Tarski, i sottoinsiemi definibili di $\mathbb{R}$ (intendiamo nuovamente gli insiemi definibili da formule in una sola variabile libera) si riducono alle unioni finite di intervalli, inclusi eventualmente singoletti e semirette. Una condizione di questo genere, in presenza di una relazione di ordine $<$, richiama il concetto già considerato di teoria fortemente minimale, per la quale ogni sottoinsieme definibile di un qualsiasi modello è finito o cofinito: ricordiamo che la teoria del campo complesso $\mathbb{C}$ fornisce un esempio algebricamente rilevante di un simile comportamento, inoltre le teorie fortemente minimali costituiscono il livello per molti versi più semplice di stabilità.

Si definisce allora **o-minimale** una struttura infinita A totalmente ordinata da una qualche relazione $<$ per cui i sottoinsiemi definibili del dominio si restringono alle unioni finite di intervalli (rispetto a $<$). Si chiama ancora **o-minimale** una teoria completa i cui modelli siano o-minimali. In altri termini, A è o-minimale se ogni sottoinsieme definibile di A è una combinazione booleana di semirette $\{x : a < x\}$, con $a \in A$. In quanto tale il sottoinsieme può essere definito senza quantificatori usando solo $<$ e non altre relazioni e operazioni eventualmente presenti nel linguaggio – onde la terminologia **o-minimale**, che sta per **minimale rispetto all'ordine**.

La nozione di o-minimalità fu introdotta da Pillay e Steinhorn nel 1986, in realtà anticipata da van den Dries negli anni precedenti per motivi che illustreremo di qui a breve (rimandiamo comunque proprio al volume di Lou van den Dries[54] per un'esposizione generale dell'argomento). Il campo reale ne fornisce, come detto, un esempio fondamentale. Tuttavia una struttura o-minimale non è certo obbligata a espandere l'ordine dei reali; deve comunque estendere un ordine totale (che nei casi più interessanti è denso senza estremi), e questa proprietà le garantisce una topologia, indotta appunto dall'ordine.

Teoremi astratti generali descrivono gli insiemi definibili di una struttura o-minimale A. La definizione stessa, che di per sé si applica, come già sottolineato, a sottoinsiemi del dominio $A = A^1$, si allarga in un senso opportuno a sottoinsiemi di A^n per ogni intero positivo n, mostrando che ognuno di essi, se definibile, si decompone come unione finita di cosiddette **celle** [54], ovvero di insiemi di natura relativamente elementare – e definibilmente connessi dal punto di vista topologico – che al livello più semplice si riducono appunto a singoletti, intervalli e semirette, ma poi vanno a coinvolgere

- archi di grafici di funzioni definibili continue,
- o regioni racchiuse da due di questi grafici in corrispondenza dello stesso intervallo aperto per l'ascissa

e via dicendo. Tanto afferma un profondo risultato di Pillay e Steinhorn. Ne consegue che ogni insieme definibile si dota in modo naturale di una dimensione, che nel caso di una varietà algebrica sul campo reale coincide con l'analoga nozione geometrica. Si deduce inoltre che la o-minimalità si preserva per elementare equivalenza, e cioè che, se una struttura è o-minimale, tutti i modelli della sua teoria completa lo sono, ovvero ancora che una teoria completa di strutture totalmente ordinate è o-minimale se e solo se esiste un suo modello che lo è. Si noti, tra parentesi, che niente di analogo vale per la forte minimalità. Per esempio i sottoinsiemi definibili dei naturali nella struttura $(\mathbb{N}, <)$ sono tutti finiti e cofiniti, ma non altrettanto vale per gli altri modelli della teoria di $(\mathbb{N}, <)$, che si guarda bene dall'essere fortemente minimale. Per strutture o-minimali che espandono un campo, vale poi un teorema di triangolazione.

Ai risultati generali astratti sulla o-minimalità si accompagnano esempi di strutture o-minimali di rilevante spessore matematico. Si è già sottolineato, tra di esse, la presenza del campo ordinato dei reali. A questo proposito si dimostra che un campo ordinato è o-minimale se e solo se è reale chiuso, cioè elementarmente equivalente a $\mathbb{R}$.

Campi reali chiusi a parte, la struttura o-minimale più affascinate è probabilmente costituita da $\mathbb{R}_{\exp}$, l'espansione del campo $\mathbb{R}$ con la funzione esponenziale reale $x \to e^x$. Anzi, fu proprio lo studio di $\mathbb{R}_{\exp}$ a ispirare in qualche modo il concetto di o-minimalità: un classico problema di Tarski chiede infatti se la teoria completa di $\mathbb{R}_{\exp}$ è, così come quella di $\mathbb{R}$, decidibile. Fu Alex Wilkie a provare che la teoria $\mathbb{R}_{\exp}$ è o-minimale [161], basandosi sulla sua model completezza. Sappiamo che quest'ultima assicura che ogni insieme definibile in $\mathbb{R}_{\exp}$ è la proiezione di un insieme definibile senza quantificatori. La o-minimalità segue allora da due fatti:

- gli insiemi definibili senza quantificatori si decompongono in $\mathbb{R}_{\exp}$ in un

numero finito di componenti connesse – un risultato di Khovanski –,
- quest'ultima proprietà si preserva per proiezioni.

Wilkie diede successivamente una seconda prova della o-minimalità di $\mathbb{R}_{\mathrm{exp}}$, che non adopera la model completezza e ha il vantaggio di estendersi ad altre strutture per le quali questa ipotesi non si applica, oppure non è ancora nota. E' questo il caso di $\mathbb{R}$ ampliato con una serie di funzioni Pfaffiane (come l'arcotangente).

Un altro esempio rilevante di struttura o-minimale [57] è costituito ancora da $\mathbb{R}$, esteso stavolta

- con tutte le funzioni analitiche, che vengono però ristrette a un compatto come $[0,1]^n$ (dove n è, caso per caso, il numero delle variabili),
- ed eventualmente con l'esponenziale non ristretto.

Il modello che viene così a costituirsi è denotato $\mathbb{R}_{\mathrm{an}}$ – $\mathbb{R}_{\mathrm{an,exp}}$ se pure la funzione esponenziale viene coinvolta. Vi si può sviluppare un opportuno adattamento della geometria subanalitica. L'ipotesi di limitazione sul dominio delle funzioni analitiche è inevitabile, per escludere dalla struttura risultante funzioni come seno e coseno, le quali, se ammesse per tutto l'asse reale, consentono di definire tramite i loro zeri un sequenza infinita di punti isolati (specificamente $\mathbb{Z}$) e quindi violano la o-minimalità.

Torniamo al problema di Tarski sulla decidibilità di $\mathbb{R}_{\mathrm{exp}}$ per ricordare un notevole risultato di Macintyre e Wilkie, che lo risolvono affermativamente [100] assumendo un'ipotesi ampiamente condivisa in teoria dei numeri trascendenti: la **congettura di Schanuel**. Essa riguarda in realtà l'ampliamento di $\mathbb{C}$, e non di $\mathbb{R}$, tramite la funzione esponenziale e afferma che, se $z_1, \ldots, z_n$ sono numeri complessi linearmente indipendenti sul sottocampo razionale, allora il grado di trascendenza di $\mathbb{Q}(z_1, \ldots, z_n, e^{z_1}, \ldots, e^{z_n})$ su $\mathbb{Q}$ è almeno n. Macintyre e Wilkie la adoperano comunque solo nell'ambito reale, dunque per $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{R}$. Per valutare la difficoltà generale del problema di Schanuel, basterà menzionare il seguente caso particolarissimo: applicata a 1 e $i\pi$, che chiaramente soddisfano la condizione di indipendenza lineare su $\mathbb{Q}$, la congettura comporta che il grado di trascendenza di $\mathbb{Q}(1, i\pi, e^1, e^{i\pi}) = Q(1, i\pi, e, -1) = \mathbb{Q}(i\pi, e)$ su $\mathbb{Q}$ è 2, in altre parole che π ed e sono algebricamente indipendenti.

Berarducci e Servi hanno fornito in [31] una versione effettiva del risultato di o-minimalità di Wilkie, determinando limitazioni superiori effettive, anzi ricorsive primitive, al numero delle componenti connesse di un insieme definibile in $\mathbb{R}_{\mathrm{exp}}$, come pure in altre espansioni di $\mathbb{R}$ con catene di funzioni Pfaffiane. Ottenere limitazioni esatte equivarrebbe a dimostrare la decidibilità di $\mathbb{R}_{\mathrm{exp}}$ – un risultato che pare al momento al di fuori della portata di questi metodi.

Di Tamara Servi ricordiamo anche un recente articolo con Gareth Jones, che, senza affidarsi a ipotesi delicate come la Congettura di Schanuel, fornisce un esempio esplicito di struttura o-minimale che espande il campo reale $\mathbb{R}$, nel caso specifico con una funzione analitica, e ammette teoria decidibile [86].

Concludiamo osservando che alcune intriganti applicazioni alla geometria diofantea hanno suscitato nei confronti della o-minimalità l'interesse dei ricercatori di teoria dei numeri. Ad esempio Pila e Wilkie [124] hanno studiato il comportamento asintotico dei punti razionali su un insieme definibile in una struttura o-minimale, e specificamente in una espansione o-minimale di $\mathbb{R}$. L'idea sottostante è che, se un tale insieme contiene "molti" punti razionali, allora una gran parte di essi giace in un sottoinsieme semialgebrico. Pila e Zannier [125] hanno adoperato i precedenti risultati per una nuova dimostrazione di un altro risultato classico della geometria algebrica, ossia del teorema di Manin-Mumford.

10. Teorie dipendenti

Stabilità e o-minimalità costituiscono due modi alternativi di determinare classi "docili" di strutture, se intendiamo la docilità, in modo relativamente vago, come l'impossibilità di definire l'anello "selvaggio" degli interi. La classe delle teorie **NIP**, o **dipendenti** è una comune generalizzazione. Introdotta anch'essa da Shelah negli anni Settanta [146], è oggetto proprio in questi anni di una sorta di riscoperta e di un'analisi vasta e intensa [148, 150] e si rivela ancora docile, nel senso di cui sopra. In modo grossolano, corrisponde all'impossibilità di codificare una relazione di appartenenza. A proposito: NIP è un acronimo per significare l'assenza di una *proprietà di indipendenza* che consiste appunto in una tale codifica. Un esempio fondamentale di teoria NIP che però non è né stabile né o-minimale è quella del gruppo ordinato $(\mathbb{Z}, +, <)$, dunque sostanzialmente l'aritmetica di Presburger, la quale ammette l'eliminazione dei quantificatori se aggiungiamo al suo linguaggio naturale simboli per le relazioni di congruenza; si noti che, in assenza della relazione d'ordine $<$, la struttura ridotta $(\mathbb{Z}, +)$ – come quella di ogni modulo – è addirittura stabile.

Altri importanti casi di strutture NIP emergono dallo studio dei campi valutati. Una classe di esempi più semplici da introdurre è costituita dalle unioni disgiunte di due strutture, una stabile e una o-minimale. Anche a loro proposito, però, si rilevano intriganti collegamenti algebrici, come il fatto che i gruppi definibili nell'unione disgiunta della struttura stabile $(\mathbb{Z}, +)$ con la struttura o-minimale $\mathbb{R}$ coincidono esattamente con i ricoprimenti dei gruppi definibili in $\mathbb{R}$ rispetto a una naturale topologia di Lie [82][27].

Anche la nozione di **semplicità** estende la stabilità. Ancora introdotte da Shelah [146], le teorie semplici furono studiate approfonditamente alla fine degli anni Novanta da Kim e Pillay [89], che vi ravvisarono la possibilità di sviluppare un buon concetto di indipendenza, ovviamente più debole che nella stabilità. La semplicità è concetto in qualche modo ortogonale alla o-minimalità rispetto alla dipendenza, nel senso che una teoria semplice e dipendente è o-minimale. Anche le teorie semplici e instabili includono esempi algebricamente rilevanti, cui strumenti e metodi elaborati in astratto si applicano con successo, producendo convincenti progressi investigativi. Citiamo qui i campi delle differenze [36], ovvero gli ampliamenti di un campo con un automorfismo, come $(\mathbb{K}, Fr)$ dove $\mathbb{K}$ è un campo perfetto di caratteristica prima p e Fr è il morfismo di Frobenius $x \to x^p$. La teoria (model completa ma non completa) $ACFA$ dei **campi con automorfismo algebricamente chiusi** rappresenta in questo ambito una sorta di analogo della teoria dei campi algebricamente chiusi tra i campi. Le sue estensioni complete sono classificate, e si dimostrano tutte semplici. Altrettanto può dirsi dei campi pseudofiniti, ovvero dei modelli infiniti della teoria dei campi finiti. Per un generale resoconto sulla semplicità consigliamo il libro di Frank Wagner [160].

Tra le strutture che estendono la retta reale, l'impossibilità di definire l'anello $\mathbb{Z}$ degli interi rappresenta una condizione chiaramente più debole della o-minimalità. Tuttavia Fornasiero, Hieronymi e Miller hanno provato nel 2013 che già questo alleggerimento delle ipotesi garantisce ottimi risultati di struttura per le teorie che lo soddisfano [67]. La dicotomia relativa a $\mathbb{Z}$ ispira anche il concetto di struttura **definibilmente completa** [66], studiato da Antongiulio Fornasiero e Tamara Servi anche in riferimento alla teoria dei modelli delle funzioni Pfaffiane [70].

11. Il campo esponenziale complesso

Di $\mathbb{R}_{\exp}$ e della sua "docilità" si è detto. Viene allora naturale investigare l'equivalente complesso, ovvero il campo esponenziale $\mathbb{C}_{\exp}$ – l'espansione di $\mathbb{C}$ con la sua funzione esponenziale $z \to e^z$. Stavolta, però, lo scenario cambia in modo drammatico. Infatti l'anello degli interi $\mathbb{Z}$ si dimostra definibile in questa struttura, e quindi le comunica la sua indecidibilità. Ma il diavolo non sempre è così brutto come si dipinge, neppure nella teoria dei modelli della funzione esponenziale, tant'è che Boris Zilber [165] ha individuato, in un linguaggio infinitario più espressivo del primo ordine [3], una serie di assiomi che traducono proprietà vere o presunte di $\mathbb{C}_{\mathrm{exp}}$, e tra le seconde in particolare la Congettura di Schanuel, e provato che le strutture che li soddisfano godono di vari notevolissimi risultati, e tra questi di un teorema di categoricità. In particolare i suddetti assiomi ammettono a meno di isomorfismi un unico modello con la potenza del continuo, che chiameremo per semplicità il **campo di Zilber**. Il punto è se questo modello è proprio $\mathbb{C}_{\mathrm{exp}}$. Tanto ha congetturato, appunto, Zilber. Il problema ha attirato e sta attirando l'interesse di vari ricercatori, anche italiani come Paola D'Aquino e Giuseppina Terzo [47, 48, 49] Vincenzo Mantova [106], Carlo Toffalori [159]. Due direzioni sono in genere percorse nel tentativo di risolverlo. Da un lato si considerano proprietà chiave dei polinomi esponenziali sul campo complesso, come il Grande Teorema di Picard, e se ne cerca una dimostrazione basata sui soli assiomi di Zilber, che dunque si affidi a metodi e strumenti algebrici ed eviti l'uso di concetti di analisi complessa i quali, se hanno ovviamente senso per $\mathbb{C}$, non si trasferiscono al campo di Zilber. D'altro canto si cerca di provare per il campo esponenziale complesso proprietà che, invece, si deducono direttamente dagli assiomi di Zilber. Ci sono poi questioni aperte che investono entrambi i due ambiti, cioè tanto $\mathbb{C}_{\mathrm{exp}}$ quanto il campo di Zilber. Ci riferiamo per esempio a una congettura proposta da Shapiro nel 1958 a proposito del primo. Essa afferma che, se due polinomi con una sola iterazione della funzione esponenziale condividono infiniti zeri, allora essi posseggono un fattore comune non banale. La congettura è stata dimostrata da D'Aquino e Terzo con Macintyre [49] sia per $\mathbb{C}_{\mathrm{exp}}$ che per il campo di Zilber, assumendo la Congettura di Schanuel.

Torniamo alla prima direzione di ricerca, volta a sostenere la congettura di Zilber provando per il campo di Zilber proprietà chiave di $\mathbb{C}_{\mathrm{exp}}$. Osservando che quest'ultima ammette un automorfismo che è anche un'involuzione di ordine 2, e cioè il coniugio. Macintyre, Zilber, Onshuus e Kirby si sono domandati se altrettanto vale anche per il campo di Zilber. La questione è stato risolta affermativamente dal Vincenzo Mantova nella sua tesi di dottorato, e gli ha meritato proprio a Pisa il Premio AILA 2014 [106].

Di $\mathbb{C}_{\mathrm{exp}}$ si ipotizza poi un'ulteriore proprietà, che richiama in qualche senso la forte minimalità del campo complesso. Sappiamo infatti che ogni sottoinsieme definibile di $\mathbb{C}$ o è finito o ha complementare finito. Niente di simile vale per $\mathbb{C}_{\mathrm{exp}}$, del quale si congettura tuttavia la **quasi minimalità**, ovvero che ogni sottoinsieme definibile o è contabile o ha complementare contabile. Se questa affermazione fosse vera, avvalorerebbe la speranza di una ragionevole classificazione dei sottoinsiemi definibili di $\mathbb{C}_{\mathrm{exp}}$ – a prescindere dalle complicazioni derivanti dall'anello $\mathbb{Z}$.

Sempre a proposito delle funzioni esponenziali, è giusto citare almeno di sfuggita

- le ricerche di Sonia L'Innocente, in collaborazione con Angus Macintyre, Françoise Point e Carlo Toffalori, sulla loro teoria dei modelli in ambiti più generali, nella scia di [99], come per esempio sull'algebra $sl(2, \mathbb{C})$ e sulla sua algebra universale di inviluppo [93, 95]
- come pure gli studi di Giuseppina Terzo sugli ideali esponenziali degli anelli di polinomi esponenziali [50, 58, 155].

12. Gruppi definibili

L'esempio negativo degli interi, il fatto cioè che, ove il loro anello sia definibile in una data struttura, le trasmetta la propria indecidibilità, vale anche, in positivo, a sottolineare come lo studio di un modello si debba spesso estendere agli oggetti matematici che quel modello ospita in sè, magari solo implicitamente, perché li interpreta. Del resto esistono al proposito altre conferme, come i gruppi algebrici su un fissato campo $\mathbb{K}$, che risultano definibili in $\mathbb{K}$ e contribuiscono in modo rilevante ad approfondire la conoscenza di $\mathbb{K}$. Non è dunque sorprendente constatare che lo studio dei gruppi definibili svolge ruolo cruciale nella ricerca sulle strutture stabili, oppure o-minimali.

Nel caso stabile, esiste una classica congettura di Cherlin e Zilber, talora chiamata Congettura dell'Algebricità, che afferma che un gruppo semplice infinito di rango di Morley finito è un gruppo algebrico su un qualche campo algebricamente chiuso. La congettura ha sollecitato un'indagine sistematica dei gruppi di rango di Morley finito, che costituisce da anni un capitolo importante della teoria dei modelli. Idee, strumenti e metodi della classificazione dei gruppi semplici finiti sono impiegati per una piena comprensione di queste strutture, e in particolare per il chiarimento dell'ipotesi di Cherlin e Zilber. Varie monografie ne danno resoconto, e tra queste [1] e [32].

Nel caso o-minimale il collegamento, piuttosto che con i gruppi algebrici, è con i gruppi di Lie reali. Ad attestarlo c'è anzitutto un teorema di Pillay del 1988 [126], che mostra come un gruppo G definibile in una struttura o-minimale A (che espande un campo) si possa dotare di una topologia canonica, che è chiamata t-topologia e lo rende un gruppo topologico e addirittura, nel caso in cui A espande il campo ordinato reale, un gruppo di Lie su $\mathbb{R}$.

Un secondo motivo di connessione fa ancora riferimento a Pillay e a una serie di interrogativi da lui proposti in questo ambito e conosciuti in genere come **congetture di Pillay**. Si prova allora, quando la struttura o-minimale A è abbastanza saturata, cioè "grande" e ricca di elementi, che si può associare in modo naturale a ogni gruppo G definibile in A un sottogruppo G^{00}, che viene chiamato **infinitesimo** ed è, se non definibile, almeno intersezione infinita di gruppi definibili [128], tale che il relativo gruppo quoziente G/G^{00} è un gruppo topologico compatto e localmente connesso e soddisfa la condizione della catena discendente sui sottogruppi chiusi. Tanto dimostrano Berarducci, Otero, Peterzil e Pillay stesso in [30]. Dalla soluzione di Gleason, Montgomery e Zippin del quinto problema di Hilbert consegue che G/G^{00} ammette in definitiva la struttura di gruppo di Lie reale.

Emergono così, per A sufficientemente saturata, due collegamenti con i gruppi di Lie: il primo tramite la t-topologia su G (che però determina un gruppo di Lie reale solo se A espande $\mathbb{R}$), e il secondo tramite il quoziente rispetto al sottogruppo infinitesimo di G.

Una parentesi al di fuori della o-minimalità: Shelah ha provato che G^{00} si introduce pure nel contesto delle teorie dipendenti [147], anche se, in questo caso, il gruppo compatto G/G^{00} non è necessariamente un gruppo di Lie. In taluni casi G/G^{00} si può vedere come una sorta di completamento di G. Per esempio a partire dal gruppo $\mathbb{Z}$ si ottiene per questa via il suo completamento classico $\widehat{\mathbb{Z}}$.

Stabilire fino a che punto G/G^{00} rifletta le proprietà di G non è compito da poco. Tuttavia, per tornare all'ambito o-minimale, Hrushovski, Peterzil e Pillay hanno provato, completando la dimostrazione delle congetture di Pillay, che, nel caso definibilmente compatto (cioè quando G è compatto rispetto a ricoprimenti definibili), la dimensione di G/G^{00} come gruppo di Lie coincide con la dimensione o-minimale di G [81]. Inoltre G è elementarmente equivalente a G/G^{00} [82]. Di più, la proiezione di G su G/G^{00} "preserva" la misura [83]: l'immagine di un sottoinsieme definibile di G con interno vuoto ha misura di Haar nulla, così che è lecito introdurre per i sottoinsiemi definibili X di G una misura μ finitamente additiva ponendo, per ogni X, $\mu(X)$ uguale alla misura della proiezione di X in G/G^{00}.

I precedenti risultati non forniscono grandi informazioni sulla topologia di G/G^{00}.

Tuttavia una serie di lavori di Berarducci, Conversano, Edmundo, Mamino, Otero e Baro [19, 22, 23, 28, 40, 102] approfondisce l'argomento, per G definibilmente compatto, attraverso le studio dei funtori di omologia e di omotopia. La conclusione è che il tipo di isomorfismo di G/G^{00} nella categoria di Lie determina il tipo di omotopia di G nella categoria definibile [26, 18], e addirittura il suo tipo di omeomorfismo, sotto qualche ipotesi accessoria, per esempio quando G è semialgebrico o la sua dimensione non è uguale a 4 [19] – ma la questione generale resta a questo riguardo ancora aperta.

Sembra in definitiva che la categoria definibile si riveli talora troppo stretta perfino per gli studiosi di teoria dei modelli. Concetti che pure hanno un ruolo nevralgico, come G^{00} o come G/G^{00}, stanno a testimoniarlo, perché non sono di per sè definibili, anche se si ottengono da oggetti definibili tramite intersezioni infinite e passaggi al quoziente. In questa prospettiva attraggono un qualche interesse anche certe funzioni e strutture che sono chiamate **localmente definibili** e includono limiti induttivi di oggetti definibili. Situazioni di questo genere emergono nuovamente in modo naturale dallo studio dei gruppi definibili. Per esempio il sottogruppo derivato di un gruppo definibile è soltanto localmente definibile, in quanto unione contabile di insiemi definibili. In modo analogo il ricoprimento universale di un gruppo G definibile in una struttura o-minimale può essere considerato come localmente definibile.

I gruppi localmente definibili in una struttura o-minimale possono anche rivelarsi abbastanza "selvaggi", tant'è che includono tutti i gruppi contabili. Tuttavia, sotto ragionevoli ipotesi di connessione si può addirittura congetturare che pure essi finiscano per condividere molte proprietà dei gruppi di Lie. Tanto sottolineano anche recenti lavori di Eleftheriou e Peterzil e di Berarducci con Edmundo e Mamino [60, 24].

13. Moduli

Tutti i moduli sono stabili, si è detto, e quindi nessun modulo interpreta l'anello degli interi. Di più i moduli su un fissato anello R soddisfano il teorema di eliminazione dei quantificatori di Baur-Monk. Non che questo basti a "classificare" adeguatamente gli R-moduli. Per certi anelli R, infatti, la classe degli R-moduli codifica un'altra questione insolubile famosa, e cioè il problema della parola per i gruppi: tanto capita, per esempio, quando R è l'anello dei polinomi a coefficienti razionali in due indeterminate x, y. Queste situazioni "selvagge", che spesso corrispondono in modo naturale a teoremi di indecidibilità per la teoria dei moduli su R, come pure, all'opposto, i casi "docili" che consentono una qualche classificazione e si combinano talora con risultati di decidibilità dipendono evidentemente da R. Prima di addentrarci nella questione, converrà tuttavia chiarire quale genere di classificazione si può specificamente attendere per i moduli. Il classico teorema di decomposizione dei gruppi abeliani (alias $\mathbb{Z}$-moduli) finitamente generati – che li rappresenta in modo unico a meno di isomorfismi come somme dirette (finite) di gruppi ciclici finiti con ordine la potenza di un primo, oppure infiniti, cioè isomorfi al gruppo degli interi, e dunque di addendi diretti non ulteriormente decomponibili – è un utile punto di riferimento. Non che la rappresentazione si possa estendere alla totalità dei gruppi abeliani, sono infatti ben noti gli ostacoli che un simile progetto incontra già per gruppi numerabili. Tuttavia un famoso risultato di Wanda Szmielew classifica i gruppi abeliani a meno di elementare equivalenza e ispira un successivo approfondimento di Eklof e Fischer, che assicura un'analoga decomposizione per quei gruppi abeliani che sono chiamati **puri iniettivi** (o **algebricamente compatti**). La rappresentazione di questi ultimi coinvolge come addendi diretti indecomponibili non solo i gruppi ciclici con ordine la potenza di un qualche primo p, ma anche, sempre al variare di p, i gruppi di Prüfer $\mathbb{Z}(p^\infty)$, i completamenti p-adici delle localizzazioni di $\mathbb{Z}$ a p e finalmente il gruppo additivo dei razionali. Maggiori dettagli su questa decomposizione saranno forniti nel giro di poche righe.

Possiamo allora augurarci che altrettanto valga su ogni R. In altre parole, possiamo concentrare l'attenzione, come nel caso abeliano, sugli R-moduli puri iniettivi. Questi ultimi si introducono in varie maniere equivalenti, in particolare, dal punto di vista della teoria dei modelli, come quelli dotati di una forma debole di saturazione, riferita alle pp-formule. Di più, sono ragionevolmente rappresentativi della classe di tutti i moduli su R, infatti si dimostra che ogni R-modulo M ammette una sorta di estensione pura iniettiva minimale, che prende nome di **involucro puro iniettivo** di M, è unica a meno di isomorfismi che fissano M identicamente e della quale M è pure sottostruttura elementare. Vale a questo punto un teorema di decomposizione che rappresenta, in modo unico a meno di isomorfismi, ogni modulo puro iniettivo come l'involucro puro iniettivo di una somma diretta di addendi indecomponibili - a meno di un eventuale ulteriore addendo **superdecomponibile**, cioè privo di addendi diretti indecomponibili non nulli. Tanto vale, per esempio, per i gruppi abeliani, per i quali addirittura si esclude ogni addendo superdecomponibile. Il risultato generale, su anelli arbitrari, fu parzialmente anticipato da Fisher, ma è principalmente dovuto a Martin Ziegler e si trova nel suo articolo [163] – un irrinunciabile punto di riferimento per la teoria dei modelli dei moduli. A proposito: i risultati che stiamo citando si trovano descritti in dettaglio in [163], ma anche nelle due fondamentali monografie che Mike Prest ha dedicato all'argomento [130, 131]. Sempre [163] mostra come, per ogni R, le classi di isomorfismo degli R-moduli puri iniettivi costituiscano uno spazio topologico, che oggi viene comunemente chiamato lo **spettro di Ziegler** di R, rispetto a una topologia suggerita dalle pp-formule ed evidenzia come la conoscenza di questo spazio, tanto dei punti quanto della topologia, è un passo cruciale per la comprensione degli R-moduli, in algebra così come in logica, per esempio verso il problema della decidibilità. Nel caso $R = \mathbb{Z}$ una piena descrizione dello spettro conduce anche alla prova che la teoria dei gruppi abeliani è decidibile. In altri casi, però, ad esempio quando $R = \mathbb{Q}[x, y]$, la conclusione è di tutt'altro tenore, e la teoria dei moduli si rivela indecidibile.

Tramite le pp-formule si introducono, o almeno si traducono e si formalizzano in modo relativamente semplice, nozioni di dimensione adeguate allo studio dei moduli su un anello R, quali **larghezza** e **m-dimensione**. L'impossibilità di definire su un dato R questi concetti in modo pieno ed esteso corrisponde spesso alla presenza su R di moduli superdecomponibili puri iniettivi.

Annalisa Marcja, Sonia L'Innocente e Carlo Toffalori hanno collaborato e collaborano sulla teoria dei modelli dei moduli con alcuni tra i maggiori ricercatori – e tra loro Mike Prest, Ivo Herzog, Gena Puninski – per esempio sulla corrispondenza tra docile e decidibile, o tra selvaggio e indecidibile [108, 109, 113, 157, 158, 133, 135, 136, 137], oppure sull'esistenza di superdecomponibili e sullo studio di larghezza e m-dimensione [132, 134, 138]. Un programma avviato da Ivo Herzog [75] si interessa delle rappresentazioni di un'algebra di Lie $sl(2, \mathbb{K})$ dove $\mathbb{K}$ è un campo algebricamente chiuso di caratteristica 0, in particolare di quelle di dimensione finita su $\mathbb{K}$ e dei modelli di dimensione infinita della loro teoria. Tra parentesi: la teoria di tutti i moduli su $sl(2, \mathbb{K})$ è anch'essa indecidibile. Sonia L'Innocente partecipa attivamente a questo programma [76, 77, 92, 96].

14. Omissioni

Nemmeno un resoconto sommario come il nostro ha mancato di evidenziare la sorprendente ricchezza di spunti e applicazioni della moderna teoria dei modelli. Proprio per questo, se dovessimo prevederne ora le evoluzioni future, ci troveremmo fortemente a disagio. Per quanto chiara e inequivocabile sia la definizione che ne abbiamo fornito all'inizio, riesce davvero difficile stabilirne adesso esattamente i confini. Non che possa sussistere dubbio alcuno sul fatto che essa costituisca un settore vivo, efficace, in rapido sviluppo, con crescenti interazioni con altre parti della matematica [37, 38, 74, 98]. Esiste però chi dubita che essa faccia ancora parte della logica. Se l'equazione di Hodges *"teoria dei modelli = geometria algebrica senza campi"* sembra oggi per certi versi superata, è solo perché il riferimento alla geometria algebrica pare restrittivo, e scenari più estesi, come la teoria dei numeri nelle sue variegate sfaccettature, la matematica diofantea, l'analisi complessa e altro ancora intervengono a sostituirlo. Osservò tuttavia Abraham Robinson nei primi anni '50 del XX secolo, e quindi agli albori della teoria dei modelli, che la logica era in grado di produrre *"strumenti utili per gli sviluppi della matematica moderna, più in particolare dell'algebra e, sembrerebbe, della geometria algebrica"*. Abraham Robinson si può ben ritenere uno dei padri della teoria dei modelli, così che il suo parere era ed è da reputarsi autorevole. In effetti è facile convenire che la teoria dei modelli ha realizzato quella sua profezia, rivelandosi un settore che, pur nato e cresciuto rigorosamente nell'ambito logico, è stato e continua a essere prodigo di applicazioni in larghissime aree della matematica, fin quasi a far dimenticare le sue origini.

Abbiamo cercato di dimostrare alcuni aspetti di questa varietà di idee e sviluppi, sottolineando anche il contributo che la comunità italiana vi ha portato e vi porta. A questo proposito, ci piace ricordare i due CIME di teoria dei modelli che, a distanza di quasi quaranta anni, si sono tenuti in Italia: quello di Bressanone del 1975, diretto da Piero Mangani [103], e quello recente di Cetraro del 2012 [56]. Nè questi sono stati gli unici esempi al riguardo. Abbiamo accennato ai tre bellissimi convegni sulla stabilità organizzati a Trento da Annalisa Marcja intorno al 1980. In tempi più recenti, ricordiamo Ravello come centro di fortunati incontri internazionali su teoria dei modelli e applicazioni, organizzati in particolare da Paola D'Aquino.

Dobbiamo tuttavia riconoscere nuovamente che questa nostra nota è ricca soprattutto di omissioni. A livello generale dobbiamo prendere atto di aver ignorato o quasi l'estesa letteratura che in teoria dei modelli riguarda argomenti come i campi valutati, i campi p-adici, i campi differenziali, i campi delle differenze - solo per indicarne alcuni. A essi dedichiamo solo qualche riferimento nella bibliografia finale. Allo stesso modo abbiamo trascurato tanti contributi di ricercatori italiani, soprattutto giovani, e talora i nomi stessi di questi ricercatori - e citarne adesso frettolosamente alcuni, come Stefano Baratella, Silvia Barbina, Pietro Dello Stritto, Annalisa Conversano, Elisabetta Pastori, Davide Penazzi, Domenico Zambella, dimenticandone verosimilmente altrettanti, oppure allargare la bibliografia a includere altri riferimenti "italiani" non espressamente citati nel testo suonano solo come goffi tentativi di riparazione. Ci sarebbe piaciuto approfondire anche il lavoro di Marco Forti, Mauro Di Nasso e dei loro collaboratori, come Lupini e Luperi, sulle interazioni tra teoria dei modelli e teoria degli insiemi a proposito di analisi non standard e studio degli ultrafiltri, oppure quello di Olivia Caramello, sul collegamento tra la teoria astratta dei modelli con la teoria delle categorie e con i topos. Allo stesso modo, volgendo stavolta lo sguardo al passato, sarebbe stato giusto riservare l'enfasi dovuta ai risultati di altri ricercatori italiani, come Francesco Lacava e Sauro Tulipani, in tema di model completezza ed eliminazione dei quantificatori applicate a varie classi di strutture algebriche. Unica scusante per tante dimenticanze e trascuratezze è la difficoltà di concentrare in poche pagine una tale ricchezza di nomi, spunti e contributi. Così non ci resta che congedarci, confidando che quanto abbiamo scritto sia comunque di qualche utilità.

Riferimenti bibliografici

[1] T. Altinel, A. Borovik e G. Cherlin. *Simple groups of finite Morley rank*. Math. Surveys and Monographs 145, Amer. Math. Soc., 2008.
[2] J.T. Baldwin. *Fundamentals of stability theory*. Springer, New York, 1988.
[3] J.T. Baldwin. *Categoricity*. University Lecture Series 50, American Mathematical Society, 2009.
[4] J.T. Baldwin e A.H. Lachlan. On strongly minimal sets. *J. Symbolic Logic*, 36(1):79–96, 1971.
[5] S. Baratella e M. Prest. Modules over the dihedral algebras. *Comm. Algebra*, 25(1):11-31, 1997.
[6] S. Baratella e C. Toffalori. The theory of $\mathbb{Z}C(2)^2$-lattices is decidable. *Arch. Math. Logic*, 37(2):91-104, 1998.
[7] S. Baratella e S.A. Ng. Fixed points in the nonstandard hull of a Banach space. *Nonlinear Analysis*, 34(2):299-306, 1998.
[8] S. Baratella e S.A. Ng. Neocompact Quantifier Elimination in Structures based on Banach Spaces. *Ann. Pure Appl. Logic*, 111(1):115-143, 2001.
[9] S. Baratella e S.A. Ng. Model-theoretic properties of Banach spaces. *Proceedings 3rd Asian mathematical conference 2000*, 17-37, World Scientific, 2002.
[10] S. Baratella e S.A. Ng. A nonstandard proof of the Eberlein-Smulian theorem. *Proc. Amer. Math. Soc.* 131(10):3177-3180, 2003.
[11] S. Baratella e S.A. Ng. Consequences of neocompact quantifier elimination. *Math. Logic Quarterly*, 49(2):150-162, 2003.
[12] S. Baratella e S.A. Ng. Isometry games in Banach spaces. *Bull. Belgian Math. Soc. Simon Stevin*. 15(3):509-521, 2008.
[13] S. Baratella e S.A. Ng. Some properties of nonstandard hulls of Banach spaces. *Bull. Belgian Math. Soc. Simon Stevin*, 18(1):31-38, 2011.
[14] S. Barbina. Reconstruction of classical geometries from their automorphism group. *J. London Math. Soc.*, 75(2):298-316, 2007.
[15] S. Barbina e H.D. Macpherson. Reconstruction of homogeneous relational structures. *J. Symbolic Logic*, 72(3):792-802, 2007.
[16] S. Barbina e D. Zambella. A viewpoint on amalgamation classes. *Comm. Math. Univ. Carolinae*, 51(4):681-691, 2010.
[17] S. Barbina e D. Zambella. Generic expansions of countable models. *Notre Dame J. Formal Logic*, 53(4):511-523, 2012.
[18] E. Baro. On the o-minimal LS-category. *Israel J. Math.*, 185(1):61-76, 2011.
[19] E. Baro e A. Berarducci. Topology of definable abelian groups in o-minimal structures. *Bull. London Math. Soc.*, 44(3):473-479, 2012.
[20] J. Barwise. *Handbook of Mathematical Logic*. North-Holland, Amsterdam,1977.
[21] J. Barwise-S. Feferman (a cura di). *Model-theoretic logics*. Perspectives in Mathematical Logic, Springer, New York, 1985.
[22] A. Berarducci. O-minimal spectra, infinitesimal subgroups and cohomology. *J. Symbolic Logic*, 72(4):1177-1193, 2007.
[23] A. Berarducci. Cohomology of groups in o-minimal structures: acyclicity of the infinitesimal subgroup. *J. Symbolic Logic*, 74(3):891-900, 2009.
[24] A. Berarducci, M. Edmundo e M. Mamino. Discrete subgroups of locally definable groups. *Selecta Mathematica*, 19(3):719-736, 2013.
[25] A. Berarducci e A. Fornasiero. O-minimal cohomology: finiteness and invariance results. *J. Math. Logic*, 9(2):167-182, 2009.
[26] A. Berarducci e M. Mamino. On the homotopy type of definable groups in an o-minimal structure. *J. London Math. Soc.*, 83(3):563-586, 2011.
[27] A. Berarducci e M. Mamino. Groups definable in two orthogonal sorts. arXiv preprint arXiv:1304.1380, 1-18, 2013.
[28] A. Berarducci, M. Mamino e M. Otero. Higher homotopy of groups definable in o-minimal structures. *Israel J. Math.*, 180(1):143-161, 2010.
[29] A. Berarducci e M. Otero. O-minimal fundamental group, homology and manifolds. *J. London Math. Soc*, 65(2):257-279, 2002.
[30] A. Berarducci, M. Otero, Y. Peterzil e A. Pillay. A descending chain condition for groups definable in o-minimal structures. *Ann. Pure Appl. Logic*, 134(2-3):303-313, 2005.
[31] A. Berarducci e T. Servi. An effective version of Wilkie's theorem of the complement and some effective o-minimality results. *Ann. Pure Appl. Logic*, 125(1-3):43-74, 2004.
[32] A. Borovik e A. Nesin. *Groups of finite Morley rank*. Clarendon Press, Oxford, 1994.
[33] E. Bouscaren (a cura di). *Model theory and algebraic geometry*. Lecture Notes in Mathematics 1696, Springer, New York, 1998.

[34] G. Boxall, D. Bradley-Williams, C. Kestner, A. Omar Aziz e D. Penazzi. Weak one-basedness. *Notre Dame J. Formal Logic*, 54(3-4):435-448, 2013.
[35] C.C. Chang e H.J. Keisler. *Model Theory*. North Holland, Amsterdam, 1973.
[36] Z. Chatzidakis ed E. Hrushovski. The model theory of difference fields. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 351:2997-3071, (1999).
[37] Z. Chatzidakis, D. Macpherson, A. Pillay e A. Wilkie. *Model theory with applications to algebra and analysis I*. London Mathematical Society Lecture Note Series 349, Cambridge University Press, Cambridge, 2008.
[38] Z. Chatzidakis, D. Macpherson, A. Pillay, A. Wilkie. *Model theory with applications to algebra and analysis II*. London Mathematical Society Lecture Note Series 350, Cambridge University Press, Cambridge, 2008.
[39] A. Conversano. Maximal compact subgroups in the o-minimal setting. *J. Math. Logic*, 13(1):1350004, 2013.
[40] A. Conversano. A reduction to the compact case for groups definable in o-minimal structures. *J. Symbolic Logic*, 79(1):45-53, 2014.
[41] A. Conversano e A. Pillay. Connected components of definable groups and o-minimality I. *Adv. Math.*, 231:605-623, 2012.
[42] A. Conversano e A. Pillay. Connected components of definable groups and o-minimality II. *Ann. Pure Appl. Logic*, in corso di stampa. arXiv preprint arXiv:1106.3442, 1-22, 2011.
[43] A. Conversano e A. Pillay. On Levi subgroups and the Levi decomposition for groups definable in o-minimal structures. *Fund. Math*, 222:49-62, 2013.
[44] P. D'Aquino, J. Knight, S. Kuhlmann, K. Lange. Real closed exponential fields. *Fund. Math.*, 219:163-190, 2012.
[45] P. D'Aquino, J. Knight, S. Starchenko. Real closed fields and models of Peano Arithmetic. *J. Symbolic Logic*, 75:1-11, 2010.
[46] P. D'Aquino, S. Kuhlmann, K. Lange. A valuation theoretic characterization of recursively saturated real closed fields. *J. Symbolic Logic*, in corso di stampa.
[47] P. D'Aquino, A. Macintyre e G. Terzo. Schanuel Nullstellensatz for Zilber fields. *Fund. Math.* 207(2):123-143, 2010.
[48] P. D'Aquino, A. Macintyre e G. Terzo. Comparing $\mathbb{C}$ and Zilber's exponential fields: Zero sets of exponential polynomials. *J. Inst. Math. Jussieu*, in corso di stampa.
[49] P. D'Aquino, A. Macintyre e G. Terzo. From Schanuel's Conjecture to Shapiro's Conjecture. *Comm. Math. Helv.*, in corso di stampa.
[50] P. D'Aquino e G. Terzo. A note on the decidability of exponential terms. *Math. Logic Quart.* 53(3):306-310, 2007.
[51] P. Dello Stritto. Asymptotic classes of finite Moufang polygons. *Modnet Preprint*, 206, 2009.
[52] P. Dello Stritto. Supersimple Moufang polygons. *Modnet Preprint*, 232, 2010.
[53] J. Denef, L. Lipshitz, T. Pheidas e J. Van Geel. *Hilbert's tenth problem: relations with arithmetic and algebraic geometry*. Contemporary Mathematics 270, American Mathematical Society, 2000.
[54] L. van den Dries. *Tame topology and o-minimal structures*. London Math. Soc. Lecture Notes Series 248, Cambridge University Press, Cambridge, 1998.
[55] L. van den Dries. Lectures on the model theory of valued fields. In [56], 55-157.
[56] L. van den Dries, J. Koenigsmann, H.D. Macpherson, A. Pillay e C. Toffalori. *Model theory in Algebra, Analysis and Arithmetic*. Cetraro, Italy, 2012, Lecture Notes in Mathematics 2111, CIME Foundation Subseries, Springer, Heidelberg, 2014.
[57] L. van den Dries e C. Miller. On the real exponential field with restricted analytic functions. *Israel J. Math.*, 85:19-56, 1994.
[58] M. Edmundo e G. Terzo. On freely generated E-subrings. *J. Pure Appl. Algebra*, 213:690-697, 2009.
[59] M. Edmundo e G. Terzo. A note on generic subsets of definable groups. *Fund. Math.*, 215:53-65, 2011.
[60] P. Eleftheriou e Y. Peterzil. Definable quotients of locally definable groups. *Selecta Mathematica*, 18(4):885-903, 2012.
[61] Y.L. Ershov, I.A. Lavrov, A.D. Taimanov e M.A. Taitslin. Elementary theories. *Russian Mathematical Surveys* , 20(4):35-105, 1965.
[62] D. Evans ed E. Pastori. Second cohomology groups and finite covers of infinite symmetric groups. *J. Algebra*, 330(1):221-233, 2011.
[63] A. Fornasiero. Embedding Henselian fields into power series. *J. Algebra*, 304(1):112-156, 2006.
[64] A. Fornasiero. Dimensions, matroids, and dense pairs of first order structures. *Ann. Pure Appl. Logic*, 162(7):514-543, 2011.
[65] A. Fornasiero. Locally o-minimal structures and structures with locally o-minimal open core. *Ann. Pure Appl. Logic*, 164(3):211-229, 2013.

[66] A. Fornasiero e P. Hieronymi. A fundamental dichotomy for definably complete expansions of ordered fields. arXiv preprint arXiv:1305.4767, 1-16, 2013.

[67] A. Fornasiero, P. Hieronymi e C. Miller. A dichotomy for expansions of the real field. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 141(2):697-698, 2013.

[68] A. Fornasiero, F. V. Kuhlmann e S. Kuhlmann. Towers of complements to valuation rings and truncation closed embeddings of valued fields. *J. Algebra*, 323(3):574-600, 2010.

[69] A. Fornasiero e M. Mamino. Arithmetic of Dedekind cuts of ordered Abelian groups. *Ann. Pure Appl. Logic*, 156(2):210-244, 2008.

[70] A. Fornasiero e T. Servi. Relative Pfaffian closure for definably complete Baire structures. *Illinois J. Math.*, 55(3):1203-1219, 2011.

[71] A. Fornasiero e T. Servi. Definably complete Baire structures. *Fund. Math.*, 209(3):215-241, 2010.

[72] J. Gismatullin, D. Penazzi e A. Pillay. On compactifications and the topological dynamics of definable groups. *Ann. Pure Appl. Logic*, 165:552-562, 2014.

[73] J. Gismatullin, D. Penazzi e A. Pillay. Some model theory of $SL(2,\mathbb{R})$. arXiv preprint arXiv:1208.0196, 1-10, 2012.

[74] D. Haskell. A. Pillay e C. Steinhorn (a cura di), *Model Theory, Algebra and Geometry*. MSRI Publications, Cambridge University Press, Cambridge, 2000.

[75] I. Herzog. The pseudo-finite dimensional representations of $sl(2,k)$. *Selecta Mathematica*, 7:241-290, 2001.

[76] I. Herzog e S. L'Innocente. The nonstandard quantum plane. *Ann. Pure Appl. Logic*, 156(1):78-85, 2008.

[77] I. Herzog e S. L'Innocente. Diophantine sets of representations. *Adv. Math.*, 255:338-351, 2014.

[78] W. Hodges. *Model theory*. Encyclopedia of Mathematics and its Applications 42, Cambridge University Press, Cambridge, 1993.

[79] E. Hrushovski. A new strongly minimal set. In: *Stability in model theory, III*, Trento, 1991, *Ann. Pure Appl. Logic* 62(2): 147-166, 1993.

[80] E. Hrushovski. The Mordell-Lang conjecture for function fields. *J. Amer. Math. Soc.*, 9(3):667-690, 1996.

[81] E. Hrushovski, Y. Peterzil, A. Pillay. Groups, measures and the NIP. *J. Amer. Math. Soc.*, 21:563-596, 2008.

[82] E. Hrushovski, Y. Peterzil e A. Pillay. On central extensions and definably compact groups in o-minimal structures. *J. Algebra*, 327(1):71-106, 2011.

[83] E. Hrushovski e A. Pillay. On NIP and invariant measures. *J. European Math. Soc.*, 13:1005-1061, 2011.

[84] E. Hrushovski e B. Zilber. Zariski geometries. *J. Amer. Math. Soc.*, 9(1):1-56, 1996.

[85] N. Immerman. *Descriptive complexity*. Springer, New York, 1999.

[86] G. Jones e T. Servi. On the decidability of the real field with a generic power function. *J. Symbolic Logic*, 76 (4):1418-1428, 2011.

[87] G. Jones, J. Kirby e T. Servi. Local interdefinability of Weierstrass elliptic functions. *J. Inst. Math. Jussieu*, CJO2014, doi:10.1017/S1474748014000425.

[88] O. Kharlampovich e A. Myasnikov. Elementary theory of free non-abelian groups. *J. Algebra*, 302(2):451-552, 2006.

[89] B. Kim e A. Pillay. Simple theories. *Ann. Pure Appl. Logic*, 88(2-3):149-164, 1997.

[90] J. Koenigsmann. Defining $\mathbb{Z}$ in $\mathbb{Q}$. *Ann. Math.*, in corso di stampa. arXiv preprint arXiv:1011.3424, 1-24, 2010.

[91] J. Koenigsmann. Undecidability in number theory. In [56], 159-195.

[92] S. L'Innocente e A. Macintyre. Towards decidability of the theory of pseudo-finite dimensional representations of $sl_2(k)$; I. In: A. Ehrenfeucht, V. W. Marek e M. Srebrny (a cura di), *Andrzej Mostowski and Foundational Studies*, 235-260, IOS Press, 2007.

[93] S. L'Innocente, A. Macintyre e F. Point. Exponentials over the universal enveloping algebra of $sl_2(\mathbb{C})$. *Ann. Pure Appl. Logic* 161(12):1565-1580, 2010.

[94] S. L'Innocente, F. Point e C. Toffalori. On the model theory of the logarithmic function in compact Lie groups. *J. Algebra and its Applications* 12(8):22 pagine, 2013.

[95] S. L'Innocente, F. Point e C. Toffalori. Exponentiation over the quantum algebra $U_q(sl_2(\mathbb{C}))$. *Confl. Math*, 5(2):45-69, 2013.

[96] S. L'Innocente e M. Prest. Rings of definable scalars of Verma modules. *J. Algebra and its Applications*, 6(5):779-787, 2007.

[97] A. Macintyre. Model completeness. In [20], 139–180.

[98] A. Macintyre (a cura di). *Connections between Model Theory and Algebraic and Analytic Geometry*. Quaderni di Matematica, Aracne, Roma, 2000.

[99] A. Macintyre. Model theory of exponentials on Lie algebras. *Math. Struct. Comp. Sci.*, 18:189-204, 2008.

[100] A. Macintyre e A.J. Wilkie. On the decidability of the real exponential field. In *Kreiseliana: About and Around Georg Kreisel* (a cura di P. Odifreddi), 441-467, A. K. Peters, Wellesley, 1996.

[101] J. Makowsky e D. Mundici, Abstract equivalence relations. In [21], 717-746.

[102] M. Mamino. Splitting definably compact groups in o-minimal structures. *J. Symbolic Logic*, 76(3):973-986, 2011

[103] P. Mangani (a cura di). *Model theory and applications: Lectures given at the summer school of the Centro Internazionale Matematico Estivo (C.I.M.E.) held in Bressanone (Bolzano), Italy, June 20 - 28, 1975*. Springer, Heidelberg, 2011. Ristampa dell'edizione originale, Cremonese, Roma, 1975

[104] P. Mangani e A. Marcja. Shelah rank for Boolean algebras and some application to elementary theories I. *Algebra Universalis*, 10(2): 247-257, 1980.

[105] P. Mangani e A. Marcja. $\aleph_1$-Boolean spectrum and stability. *Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. (8)* (8), 72(5):269-272, 1983.

[106] V. Mantova. Involutions on Zilber fields. *Atti Accad. Naz. Lincei Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. Rend. Lincei (9), Mat. Appl.*, 22(2):237-244, 2011.

[107] A. Marcja. An algebraic approach to superstability. *Boll. Un. Mat. Ital.* A (6), 1(1):71-76, 1982.

[108] A. Marcja, M. Prest e C. Toffalori. The stability classification for Abelian-by-finite groups and modules over group rings. *J. London Math. Soc.* (2), 47:212-226, 1993.

[109] A. Marcja, M. Prest e C. Toffalori. The torsionfree part of the Ziegler spectrum of RG when R is a Dedekind domain and G is a finite group. *J. Symbolic Logic*, 67(3):1126-1140, 2002.

[110] A. Marcja e C. Toffalori. On pseudo-$\aleph_0$-categorical theories. *Z. Math. Logik Grundlag. Math.*, 30(6):533-540, 1984.

[111] A. Marcja e C. Toffalori. On Cantor-Bendixson spectra containing (1,1) I. In: G. H. Müller, M. M. Richter (a cura di), *Models and sets*, Part I, Proceedings of Logic Colloquium '83, Aachen, Lecture Notes in Mathematics 1103, 331-350, Springer, Berlino, 1984.

[112] A. Marcja e C. Toffalori. On Cantor-Bendixson spectra containing (1,1) II. *J. Symbolic Logic*, 50(3):611-618, 1985.

[113] A. Marcja e C.Toffalori. Decidable representations. *J. Pure Appl. Algebra*, 103:189-203, 1995.

[114] A. Marcja e C. Toffalori. *A guide to classical and modern model theory*. Kluwer, Dordrecth, 2003.

[115] D. Marker. *Model theory: An introduction*. Graduate Texts in Mathematics 217, Springer, New York, 2002.

[116] M. Morley. Categoricity in power. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 114:514-538, 1965,

[117] D. Mundici. Other quantifiers: an overview. In [21], 211-233.

[118] E. Pastori. Almost-free finite covers. *Comm. Algebra*, 37(9):2297-3017, 2009.

[119] E. Pastori. On finite covers, groupoids and finite internal covers. *Rend. Matematica* (7), 31:1-21, 2011.

[120] E. Pastori. A note on two Hrushovski constructions. *J. Applied Logic*, 10(1):85-91, 2012.

[121] E. Pastori e P. Spiga. Failure of n-uniqueness: a family of examples. *Math. Logic Quarterly*, 57(2):133-148, 2011.

[122] D. Penazzi. One-basedness and groups of the form G/G^{00}. *Arch. Math. Logic*, 50:743-758, 2011.

[123] D. Penazzi. One-basedness and reductions of elliptic curves over real closed fields. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 367:1827-1845, 2015.

[124] J. Pila e A.J. Wilkie. The rational points of a definable set. *Duke Math. J.*, 133(3):591-616, 2006.

[125] J. Pila e U. Zannier. Rational points in periodic analytic sets and the Manin-Mumford conjecture. *Atti Accad. Naz. Lincei Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. Rend. Lincei (9), Mat. Appl.*, 19(2):149-162, 2008.

[126] A. Pillay. On groups and fields definable in o-minimal structures. *J. Pure Appl. Algebra*, 53(3):239-255, 1988.

[127] A. Pillay. *Geometric stability theory*. Oxford Logic Guides 32. Oxford University Press, Oxford, 1996.

[128] A. Pillay. Type-definability, compact Lie groups, and o-minimality. *J. Math. Logic*, 4(2):147-162, 2004.

[129] B. Poizat. *A Course in Model Theory - An Introduction to Contemporary Mathematical Logic*. Springer, New York, 2000.

[130] M. Prest. *Model Theory and Modules*. London Mathematical Society Lecture Note Series 130, Cambridge University Press, 1988.

[131] M. Prest. *Purity, Spectra and Localization*. Encyclopedia of Mathematics and its Applictions 121, Cambridge University Press, 2009.

[132] G. Puninski, V. Puninskaya e C. Toffalori. Superdecomposable pure injective modules and integral group rings. *J. London Math. Soc.* (2), 73:48-64, 2006

[133] G. Puninski, V. Puninskaya e C. Toffalori. Decidability of the theory of modules over commutative valuation domains. *Ann. Pure Appl. Logic*, 145:258-275, 2007

[134] G. Puninski, V. Puninskaya e C. Toffalori. Krull-Gabriel dimension and the model theoretic complexity of the category of modules over group rings of finite groups. *J. London Math. Soc.* 78:125-142, 2008.

[135] G. Puninski e C. Toffalori. Towards the decidability of the theory of modules over finite commutative rings. *Ann. Pure Appl. Logic*, 159:49-70, 2009.

[136] G. Puninski e C. Toffalori. The torsion-free part of the Ziegler spectrum of the Klein four group. *J. Pure Appl. Algebra*, 2151:1791-1804, 2011.

[137] G. Puninski e C. Toffalori. Decidability of modules over a Bézout domain $D + XQ[X]$ with D a principal ideal domain and Q its field of fractions. *J. Symbolic Logic*, 79(1):296-305, 2014.

[138] G. Puninski e C. Toffalori. Model theory of modules over Bézout domains. The width. *J. Pure Appl. Algebra*, 219:807-829, 2015.

[139] A. Robinson. *Complete theories*. North-Holland, Amsterdam, 1956.

[140] A. Robinson. *Introduction to Model Theory and to the Metamathematics of Algebra*. North-Holland, Amsterdam, 1963. Edizione italiana: *Introduzione alla teoria dei modelli e alla metamatematica dell'algebra*. Boringhieri, Torino, 1974.

[141] A. Robinson. *Nonstandard Analysis*. Princeton University Press, 1996. Edizione italiana: *Analisi non standard*, Aracne, Roma, 2013.

[142] J.-P. Rolin e T. Servi. Quantifier elimination and Rectilinearisation Theorem for Generalized Quasianalytic Algebras. *J. London Math. Soc.*, in corso di stampa. arXiv preprint arXiv:1303.3724, 1-37, 2013.

[143] Z. Sela. Diophantine Geometry over groups VI: The elementary theory of a free group. *Geometric and Functional Analysis*, 16(3):707-730, 2006.

[144] T. Servi. Noetherian varieties in definably complete structures. *Logic and Analysis*, 1(3):187-204, 2008.

[145] T. Servi. Multivariate Newton-Puiseux Theorem for Generalised Quasianalytic Classes. *Ann. Inst. Fourier*, in corso di stampa. arXiv preprint arXiv:1304.0108, 1-13, 2013.

[146] S. Shelah. *Classification theory and the number of non-isomorphic models*. North-Holland, Amsterdam, 1978.

[147] S. Shelah. Minimal bounded index subgroup for dependent theories. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 136(3):1087-1091, 2008.

[148] S. Shelah. Dependent first order theories, continued. *Israel J. Math.*, 173(1):1-60, 2009.

[149] A. Shlapentokh. *Hilbert's Tenth Problem. Diophantine Classes and other extensions to Global Fields*. New Mathematical Monographs 7, Cambridge University Press, Cambridge, 2007.

[150] P. Simon. *Lecture notes on NIP theories*. arXiv preprint arXiv:1208.3944, 1-122, 2014.

[151] A. Tarski. Contributions to the Theory of Models I. *Indag. Math.*, 16:572-581, 1954.

[152] A. Tarski. Contributions to the Theory of Models II. *Indag. Math.*, 16:582-588, 1954.

[153] A. Tarski, A. Mostowski e R. M. Robinson. *Undecidable theories*. North Holland, Amsterdam, 1953.

[154] K. Tent e M. Ziegler. *A Course in Model Theory*. Lecture Notes in Logic 40, Cambridge University Press, Cambridge, 2012.

[155] G. Terzo. Some consequences of Schanuel's Conjecture in exponential rings. *Comm. Algebra*, 36(3):1171-1189, 2008.

[156] C. Toffalori. p-$\aleph_0$-categorical structures. In: J. B. Paris, A. J. Wilkie, G. M. Wilmers (a cura di), *Logic colloquium '84*, Proceedings of Logic Colloquium '84, Manchester, Studies in Logic and the Foundations of Mathematics 120, 303-327, North Holland, Amsterdam, 1986.

[157] C. Toffalori. An undecidability theorem for lattices over group rings. *Ann. Pure Appl. Logic*, 88:241-262, 1997.

[158] C. Toffalori. Wildness implies undecidability for lattices over group rings. *J. Symbolic Logic*, 62(4):1429-1447, 1997.

[159] C. Toffalori e K. Vozoris. On complex exponentiation restricted to the integers. J. Symbolic Logic 75(3):955-970, 2010.

[160] F. Wagner. *Simple theories*. Kluwer, Dordrecht, 2000.

[161] A.J. Wilkie. Model completeness results for expansions of the ordered field of real numbers by restricted Pfaffian functions and the exponential function. *J. Amer.Math. Soc.*, 9(4):1051-1094, 1996.

[162] D. Zambella. Krull dimension of types in a class of first-order theories. *Turkish J. Math.*, 35(2):323-331, 2011.

[163] M. Ziegler. Model theory of modules. *Ann. Pure Appl. Logic*, 26:149-213, 1984.

[164] B. Zilber. The structure of models of uncountably categorical theories. In: *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Warsaw 1983*, 359-368, North Holland, Amsterdam, 1984.

[165] B. Zilber. Pseudoexponentiation on algebraically closed fields of characteristic 0. *Ann. Pure Applied Logic*, 132:67-95, 2004.

[166] B. Zilber. *Zariski geometries*. London Mathematical Society Lecture Note Series 360, Cambridge University Press, 2010.

(A. Berarducci) UNIVERSITÀ DI PISA, DIPARTIMENTO DI MATEMATICA, LARGO BRUNO PONTECORVO 5, 56127 PISA, ITALY
E-mail address: `berardu@dm.unipi.it`

(C. Toffalori) UNIVERSITÀ OF CAMERINO, SCUOLA DI SCIENZE E TECNOLOGIE, SEZIONE DI MATEMATICA, VIA MADONNA DELLE CARCERI 9, 62032 CAMERINO, ITALY
E-mail address: `carlo.toffalori@unicam.it`