Esame di Analisi Numerica, secondo appello
21/2/2006

Esercizio 1. Sia A una matrice reale simmetrica $n \times n$ con autovalori λ_i, $i = 1, \ldots, n$ e autovettori ortonormali $\boldsymbol{u}_i$, $i = 1, \ldots, n$. Per la risoluzione del sistema $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ si consideri il metodo iterativo $\boldsymbol{x}_{k+1} = M^{-1}(N\boldsymbol{x}_k + \boldsymbol{b})$, dove $A = M - N$ e $\det M \neq 0$.
a) Si diano condizioni necessarie e sufficienti sui λ_i affinché il metodo ottenuto con $M = I$ sia convergente.
b) Si diano condizioni necessarie e sufficienti sui λ_i affinché esista un numero reale α tale che il metodo ottenuto con $M = \alpha I$ sia convergente.
c) Supponendo $0 < \lambda_i \leq \lambda_{i+1} < 1$ per $i = 1, 2, \ldots, n-1$ e assumendo di conoscere λ_1 e $\boldsymbol{u}_1$, si determinino i valori di α per cui il metodo iterativo ottenuto con $M = I + \alpha \boldsymbol{u}_1 \boldsymbol{u}_1^T$ sia convergente. Si determini un valore di α che massimizzi la velocità di convergenza del metodo.
d) (Facoltativo) Supponendo $\lambda_i \leq \lambda_{i+1} < 1$ per $i = 1, 2, \ldots, n-1$ si diano condizioni necessarie e sufficienti sugli autovalori di A affinché esista un α tale che il metodo ottenuto con $M = I + \alpha \boldsymbol{u}_1 \boldsymbol{u}_1^T$ sia convergente.

Esercizio 2. Sia $q(x)$ un polinomio di grado al più 2 a coefficienti razionali.
a) Sia $g(x) = x - q(x)(x^2 - 2)$. Si trovino condizioni sui coefficienti di $q(x)$ per i quali per ogni x_0 in un opportuno intorno di $\sqrt{2}$ la successione definita da $x_{k+1} = g(x_k)$ sia convergente a $\sqrt{2}$ col massimo ordine di convergenza possibile. Si scriva l'espressione di $g(x)$ e si determini l'ordine di convergenza.
b) Nella classe dei metodi così ottenuti se ne individui uno che richieda non più di 4 operazioni aritmetiche per passo (si assume che costanti razionali quali ad esempio 2/3, siano assegnate a costo zero).
c) Si determini un numero $\rho > 0$ tale che la successione generata dal metodo selezionato al punto b) sia convergente per ogni $x_0 \in [\sqrt{2}-\rho, \sqrt{2}+\rho]$, motivando la risposta.
d) (Facoltativo) Si risponda alla domanda a) nel caso di $g(x) = x - (x^2-2)/q(x)$.

Esercizio 3. Per calcolare la funzione $f(x) = x^3 - 1$, per valori reali di x, si consideri l'algoritmo $\mathcal{A}_1$ che calcola nell'ordine $s_1 = x \cdot x$, $s_2 = x \cdot s_1$, $f(x) = s_2 - 1$, e l'algoritmo $\mathcal{A}_2$ che si basa sull'identità $f(x) = (x-1)((x+1)^2 - x)$ e che calcola nell'ordine $t_1 = x+1$, $t_2 = t_1 \cdot t_1$ $t_3 = t_2 - x$, $t_4 = x - 1$, $f(x) = t_3 \cdot t_4$.
a) Mediante un'analisi in avanti si diano maggiorazioni al primo ordine α_1 e α_2 ai valori assoluti degli errori algoritmici generati rispettivamente da $\mathcal{A}_1$ e $\mathcal{A}_2$.
b) Si dimostri che α_2 è limitato superiormente da una costante e che α_1 può assumere valori arbitrariamente grandi.

Esercizio 4. Si scriva una subroutine in Fortran 90 che, presi in input un intero n e un vettore $\boldsymbol{x}$ di n componenti reali, fornisce in output il numero delle componenti di $\boldsymbol{x}$ diverse da zero e la media aritmetica dei loro valori.