Compito di Analisi Numerica, a.a.2013-2014, Appello 2, 7/2/2014

Esercizio 1. Si consideri il sistema lineare $Ax = b$ dove $b \in \mathbb{R}^n$, $A = (a_{i,j})$ è la matrice reale $n \times n$ tale che $a_{1,1} = \alpha \neq 0$, $a_{i,j} = 1$ per $i \geq j$, $i \neq 1$, $a_{1,j} = u_{j-1}$, $j = 2, \ldots, n$, $a_{i,j} = 0$ altrove, cioè $A = \left[\begin{array}{c|c} \alpha & u^T \\ \hline e & T \end{array}\right]$, $e^T = (1, \ldots, 1)$, $u^T = (u_1, \ldots, u_{n-1})$, $T = \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ \vdots & \ddots & \\ 1 & \ldots & 1 \end{bmatrix}$.

a) Posto $A = M - N$ dove $M = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & T \end{bmatrix}$, dare condizioni necessarie e sufficienti di convergenza del metodo iterativo associato a tale partizionamento.

b) Dare condizioni necessarie e sufficienti di convergenza per il metodo di Gauss-Seidel applicato a $Ax = b$. Confrontare il metodo di Gauss-Seidel con quello ottenuto al punto a) tenendo conto della velocità di convergenza e del costo computazionale per passo.

c) (Facoltativo) Dimostrare che se $v = (v_i)$ è un autovettore della matrice di iterazione J del metodo di Jacobi, applicato ad $Ax = b$, corrispondente all'autovalore λ allora $v_1 = 1$, $v_i = -\lambda^{-1}(1 - \lambda^{-1})^{i-2}$, $i = 2, \ldots, n$. Dedurre che $\rho(J) \geq |u_{n-1}/\alpha|^{1/n}$.

Esercizio 2. Sia $f(x) \in C^1(\mathcal{I}(\rho))$, $\mathcal{I}(\rho) = [\alpha - \rho, \alpha + \rho]$, $\rho > 0$, tale che $f(\alpha) = 0$ e $f'(\alpha) \neq 0$.

a) Dimostrare che se esiste un $x_0 \in \mathcal{I}(\rho)$ tale che la successione $\{x_k\}_{k \geq 0}$ generata dal metodo di Newton applicato a $f(x)$ a partire da tale x_0 è contenuta in $\mathcal{I}(\rho)$ e converge ad α allora la convergenza di questa successione è superlineare.

b) Dimostrare che se esiste $\gamma > 0$ tale che

$$|f'(x) - f'(y)| \leq \gamma |x - y|, \quad \forall x, y \in \mathcal{I}(\rho), \tag{1}$$

allora esiste $0 < \rho' \leq \rho$ tale che per ogni $x_0 \in \mathcal{I}(\rho')$ la successione generata dal metodo di Newton applicato a $f(x)$ a partire da x_0 è contenuta in $\mathcal{I}(\rho')$ e converge ad α in modo superlineare.

c) Sia $g(x) \in C^2(\mathcal{I}(\rho))$ tale che $g(\alpha) = \alpha$, e il metodo iterativo $x_{k+1} = g(x_k)$ converge ad α in modo sublineare. Studiare la convergenza locale del metodo di Newton applicato alla funzione $f(x) = x - g(x)$.

Esercizio 3. Sia A la matrice tridiagonale $n \times n$ reale con elementi diagonali non nulli $a_1, \ldots, a_n$, sotto e sopra diagonali b_i, c_i, $i = 1, \ldots, n-1$.

a) Scrivere le formule che definiscono un passo del metodo di Jacobi applicato al sistema $Ax = f$ con $f = (f_1, \ldots, f_n)$ e se ne discuta la stabilità all'indietro.

b) Scrivere una *function* nella sintassi di Octave che presi in input, i vettori colonna $x = (x_i)$, $f = (f_i)$, $a = (a_i)$, $b = (b_i)$, $c = (c_i)$ dia in output il vettore $y = (y_i)$ ottenuto dopo un passo del metodo di Jacobi.

c) (Facoltativo) dare una implementazione vettoriale.