Compito di Analisi Numerica, a.a.2014-2015, Appello 1
13/1/2015

Esercizio 1.
Siano $g_i(x) \in C^1([\alpha-\rho, \alpha+\rho])$ per $i \in \mathbb{N}$, $i \geq 1$ dove $\rho > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$ è tale che $g_i(\alpha) = \alpha$. Sia $\lambda_i = \max_{|x-\alpha|\leq\rho} |g_i'(x)|$. Si dimostri che
a) se esiste un $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che $\lambda_i \leq \lambda < 1$ allora per ogni $x_0 \in [\alpha-\rho, \alpha+\rho]$ la successione definita da $x_i = g_i(x_{i-1})$, $i \geq 1$, converge ad α;
b) sotto le condizioni del punto a), si assuma che $g_i(x) \in C^2([\alpha-\rho, \alpha+\rho])$, per $i \geq 1$ e che esista $\gamma > 0$ tale che $|g_i(x)| \leq \gamma$ per ogni $i \geq 1$ e per ogni $x \in [\alpha-\rho, \alpha+\rho]$; allora se esiste non nullo il limite $\lim_{i\to\infty} g_i'(\alpha)$, le successioni $\{x_i\}$ hanno convergenza lineare; se il limite è nullo le successioni hanno convergenza superlineare.
c) Facoltativo. Cosa si può dire della convergenza di $\{x_i\}$ sotto la condizione $\lambda_i < 1$ per ogni $i \geq 1$?

Esercizio 2.
Sia $n \geq 3$ a sia $A = (a_{i,j})$ una matrice reale $n \times n$ tale che $a_{i,j} = 0$ per $i > j$, $i = 2, \ldots, n-1$. Si ponga $A_1 = A$ e si definisca $A_2 = E_1 A_1 = (a_{i,j}^{(2)})$ dove E_1 è una matrice elementare tale che $A_2 e_1 = \alpha e_1$, con $e_1 = (1, 0, \ldots, 0)^T$ e $\alpha \neq 0$.
a) Si dimostri che se E_1 è scelta nella classe delle matrici elementari di Gauss (in questo caso assumendo $a_{1,1} \neq 0$) o nella classe delle matrici elementari di Householder allora la matrice A_2 è tale che la sua sottomatrice principale di coda $B = (b_{i,j})$, $b_{i,j} = a_{i+1,j+1}^{(2)}$, $i, j = 1, \ldots, n-1$, verifica anch'essa la proprietà $b_{i,j} = 0$, per $i > j$, $i = 2, \ldots, n-2$.
b) Si usi questa proprietà per definire un metodo per il calcolo del fattore R nella fattorizzazione QR di A che impieghi $O(n^2)$ operazioni aritmetiche.
c) Assumendo $a_{i,i} \neq 0$ per $i = 1, \ldots, n-1$ si dimostri che esiste la fattorizzazione LU di A e si dia un metodo per il calcolo del fattore U che impieghi $O(n^2)$ operazioni aritmetiche.
d) (Facoltativo) Si caratterizzi la classe delle matrici elementari per cui la sottomatrice principale di coda B di $A_2 = E_1 A_1$, con E_1 matrice elementare di questa classe, soddisfi la proprietà del punto a).

Esercizio 3.
Sia $p(x) = p_1 + p_2 x + \cdots + p_n x^{n-1}$ un polinomio a coefficienti reali di grado $n-1$ e sia $q(x) = (x^2-1)p(x) + 3x + 1$. Si scriva una function in octave che, preso in input il vettore `p` che definisce i coefficienti di $p(x)$, restituisce in output il vettore `q` che definisce i coefficienti di $q(x)$.