NOMI DELLA GEOMETRIA PROIETTIVA

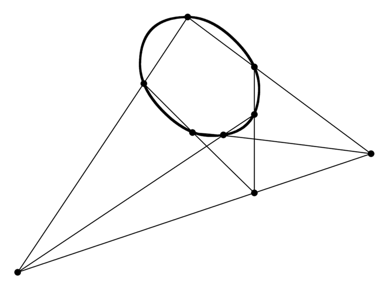
Le prime idee della Geometria Proiettiva sono comparse nell'attività pratica degli artisti e degli architetti del Rinascimento. I pittori **Beato Angelico** e **Paolo Uccello** si avvalsero della *prospettiva* per creare l'impressione di profondità. Per gli artisti dell'epoca era chiara la necessità di una base matematica per il loro lavoro e questa base la elaborò l'architetto **Filippo Brunelleschi.** In seguito **Tommaso Masaccio** e **Andrea Mantegna** la assunsero in maniera definitiva per la pittura. **Piero della Francesca, Leon Battista Alberti** e **Albrecht Dürer** rifletterono sulle nozioni di *proiezione* e *sezione* nello sforzo di comprendere il problema della rappresentazione piana di un oggetto tridimensionale. **Hans Holbein il Giovane** mostrò nei suoi quadri il fenomeno dell'*anamorfosi,* comportamento paradossale già descritto da **Leonardo da Vinci.** Il primo matematico che utilizzò queste idee fu il francese **Girard Desargues.**

1639

Desargues, architetto ed ingegnere militare di Lione, pubblica a Parigi il suo *Brouillon project d'une atteinte aux événements des rencontres d'un cone avec un plan* [Primo schizzo sui risultati di intersezione di un cono con un piano]. Nonostante il linguaggio poco convenzionale, in questo trattato si offre una presentazione bella e originale delle coniche. Qui appare per la prima volta il termine *involuzione.* I metodi proiettivi consentono a Desargues un trattamento generale ed unificato delle coniche, in contrapposizione con i metodi classici di **Apollonio.** Il libro andò perduto e se ne ritrovò una copia soltanto nel 1847 in una libreria di Parigi.

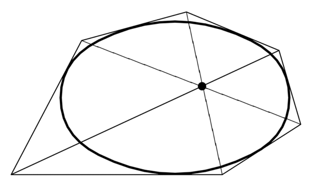
1640

Blaise Pascal pubblica a 16 anni l' *Essay pour les coniques*. Qui appariva il suo *mysterium hexagrammicum,* oggi *esagramma mistico* di Pascal, secondo il quale *le coppie di lati opposti di un esagono iscritto in una conica si incontrano in tre punti allineati.* Per dare piena validità a questo teorema è necessario ricorrere ai punti all'infinito del piano.



1806

Dopo un lungo periodo di oscurità lo studio della Geometria Proiettiva rinasce all' École Polytechnique di Parigi intorno alla figura di **Gaspard Monge.** Un suo allievo, **Julien Brianchon,** dimostra a 21 anni il teorema che porta il suo nome: *in un esagono circoscritto ad una conica le tre diagonali si incontrano in un punto*. Questo teorema è il primo esempio di *dualità* in Geometria Proiettiva: è il duale del teorema di Pascal.



1822

Jean-Victor Poncelet pubblica il *Traité des proprietés projectives des figures*. Qui si raccolgono, in parte, le riflessioni dell'autore come prigioniero di guerra in Russia durante le campagne napoleoniche. Poncelet difende ad oltranza l'uso di metodi sintetici. Il suo lavoro si concentra nello studio delle figure *omologhe,* che sono quelle che si ottengono l'una dall'altra con una successione di *proiezioni* e *sezioni.* Il suo obiettivo era trovare per ogni figura un'altra omologa più semplice il cui studio permettesse di dedurre proprietà della prima. I suoi tre principali contributi sono:

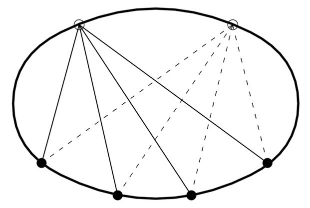
1. Il principio di continuità o *permanenza delle relazioni matematiche.*

2. La formulazione del principio di *dualità,* che si trascinò in una amara polemica di priorità con **Joseph-Diez Gergonne.**

3. La scoperta dei cosiddetti *punti ciclici all'infinito,* per cui passano tutte le circonferenze del piano.

Anche **Jacob Steiner,** figlio di un contadino svizzero, fu un apostolo dei metodi sintetici ed un estremista dei metodi didattici di insegnamento della Geometria: la insegnava senza figure e, talvolta, al buio. Fu inventore di un nuovo metodo di definire le coniche a partire dalle *omografie tra fasci di rette.* Usò sistematicamente il *birapporto* ed il principio di dualità, però rifiutò di ammettere elementi immaginari ("fantasmi della Geometria").

Michel Chasles scoprì indipendentemente qualcuno dei risultati di Steiner. Fu un praticante del cosiddetto *metodo misto:* pensava i risultati analiticamente e li presentava sinteticamente. Chasles introdusse il termine *omografia* e definì le *correlazioni.* Uno dei suoi risultati più conosciuti dice che *quattro punti fissi di una conica determinano assieme ad un quinto della stessa conica quattro rette il cui birapporto non dipende da quest'ultimo punto.*



1829

Julius Plücker giustifica rigorosamente il principio di dualità. Plücker caldeggiava l'uso dei metodi algebrici a scapito di quelli sintetici: egli fu uno degli inventori delle *coordinate omogenee* (scoperte anche da **Karl Wilhelm Feuerbach, Étienne Bobillier** e **August Ferdinand Möbius**). Queste coordinate sono state uno strumento molto adeguato a trattare nozioni in relazione con i punti all'infinito. Tuttavia, l'influenza di Steiner che respingeva i metodi analitici, portò Plücker ad abbandonare la Geometria e a dedicarsi alla Fisica.

Möbius si guadagnò la vita come astronomo. Utilizzò coordinate per rappresentare le curve e superficie mediante equazioni *omogenee* (da qui il nome delle coordinate). Möbius distinse accuratamente tra i diversi tipi di trasformazioni del piano: (a) *congruenze,* quando le figure che si corrispondono sono uguali, cioè si conservano le lunghezze e gli angoli, (b) *similitudini,* quando le figure che si corrispondono sono simili, cioè, si conservano gli angoli, (c) *affinità,* quando si conserva il parallelismo, però non necessariamente né la lunghezza né la forma, e (d) *collineazioni,* quando le rette si trasformano in rette. Möbius provò che *ogni collineazione del piano proiettivo reale è una omografia.*

1847

Karl Georg Christian von Staudt publica il suo libro *Geometrie der Lage* [Geometria di posizione], in cui sviluppa per la prima volta la Geometria Proiettiva senza fare riferimento a concetti metrici o in relazione con le grandezze. Così la Geometria Proiettiva si stabilisce come una geometria che ingloba la Geometria Euclidea. Il libro di von Staudt aveva il difetto di utilizzare l'*assioma delle parallele,* che è una nozione affine, non proiettiva. Più tardi **Felix Klein** rimedierà a questa difficoltà.

1853

Edmond Laguerre si propone di stabilire le proprietà di base della Geometria Euclidea in termini proiettivi e trova una famosa formula che misura l'angolo di due rette in termini di birapporto della quaterna formata da queste due rette e da altre due che passano per i punti ciclici. **Arthur Cayley** lavorò indipendentemente nella stessa direzione. Cayley considerò al posto dei punti ciclici una conica nel piano (*l'assoluto*) e provò che le proprietà metriche delle figure sono le proprietà proiettive relativamente all'assoluto. Ciò portò Cayley ad affermare drammaticamente: *la Geometria Metrica è una parte della Geometria Proiettiva.*

1872

Klein vede le possibilità unificatrici del concetto di gruppo in Geometria e nel suo *Programma di Erlangen* mostra come possa servire per caratterizzare le diverse geometrie apparse durante il secolo XIX. Secondo questo programma tutte le geometrie sono sottogeometrie della Geometria Proiettiva. Questo approccio è posteriore alla scoperta di un modello proiettivo del piano iperbolico. Nella definizione di questo modello si incorporano e generalizzano le idee di Caley sull'assoluto.

1882

Moritz Pasch realizza il primo tentativo di fondazione assiomatica della Geometria Proiettiva. Contributi posteriori si debbono a **Giuseppe Peano, Federigo Enriques** e **Alfred North Whitehead.** Nel testo classico *Projective Geometry* di **Oswald Veblen** e **John Wesley Young** si dà un insieme di assiomi indipendenti e si presenta una organizzazione della Geometria Proiettiva basata sulle idee di Klein, secondo cui la Geometria Proiettiva è l'ambito generale in cui appaiono diverse specializzazioni (Geometria euclidea e Geometrie non euclidee).

UCM UNIVERSIDAD COMPLUTENSE MADRID
Proyectos UCM de Innovación Educativa
Facultad de Ciencias Matemáticas, 2002
Edizione italiana a cura di Fabrizio Broglia e Jesús M. Ruiz
Università di Pisa, Dipartimento di Matematica, 2010