ORIGINI DELLA GEOMETRIA PROIETTIVA

DESCRIZIONE ASSIOMATICA DEL PIANO PROIETTIVO

Si può definire il piano proiettivo mediante *quattro assiomi di incidenza tra punti e rette.*

- Due punti determinano una unica retta.
- In ogni retta ci sono almeno tre punti.
- Esistono tre punti non allineati.
- Due rette qualsiasi si incontrano in un punto.

Se un insieme *di punti* verifica questo sistema di assiomi, in cui si evidenziano certi sottoinsiemi come *rette* e si definisce la relazione di *incidenza* "punto appartiene a retta", allora abbiamo un *piano proiettivo.*

Segue ora una domanda naturale: *Che relazione c'è tra questa definizione assiomatica di piano proiettivo e la costruzione del piano proiettivo come l'insieme delle rette di uno spazio vettoriale di dimensione 3?*

Per facilitare le spiegazioni conveniamo di denominare *piano proiettivo assiomatico* qualunque insieme di punti e rette verificante la assiomatica qui sopra e *piano proiettivo algebrico* l'insieme delle rette di uno spazio vettoriale di dimensione 3.

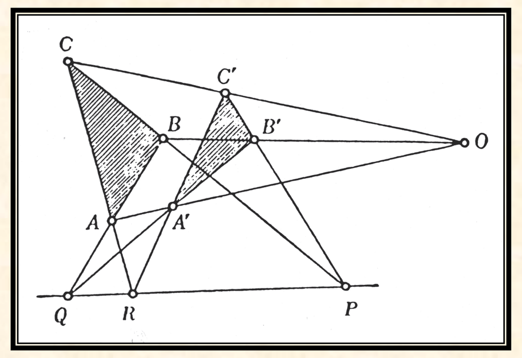
Per prima cosa si osserva che un piano proiettivo algebrico (definito sopra un corpo K finito o infinito, con 2 o più elementi) verifica il sistema di assiomi, ed è pertanto un piano proiettivo assiomatico. Ma: e reciprocamente?

La risposta a questa questione è *NO: esistono piani proiettivi assiomatici che non sono algebrici.*

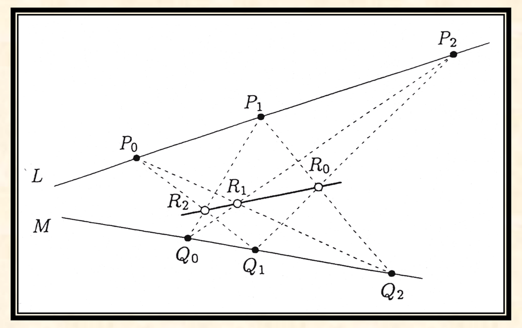
L'esistenza di questi esempi non algebrici è in relazione con uno dei risultati classici della Geometria Proiettiva: il **Teorema di Desargues,** che è verificato in tutti i piani proiettivi algebrici. Però *non tutti i piani proiettivi assiomatici verificano questo teorema,* e naturalmente, quelli che non lo verificano non possono essere algebrici. Il primo esempio di questo fenomeno si deve a OSWALD VEBLEN (1880–1960) e JOSEPH HENRY MACLAGAN WEDDERBURN (1882–1948). Per distinguerli, i piani proiettivi che verificano il teorema di Desargues prendono il nome di *desarguesiani.*

Questi piani proiettivi desarguesiani si possono definire algebricamente per quanto con una piccola sfumatura di differenza. In realtà, si dimostra che *un piano proiettivo desarguesiano si può definire in modo algebrico* (cioè come rette di uno spazio vettoriale), però non necessariamente su un corpo, bensì *sopra un anello di divisione.*

Citiamo, per completare questa discussione, che *un piano desarguesiano è definito su un corpo quando verifica un altro risultato classico: il* ***teorema di Pappo.***



Teorema di Desargues



Teorema di Pappo

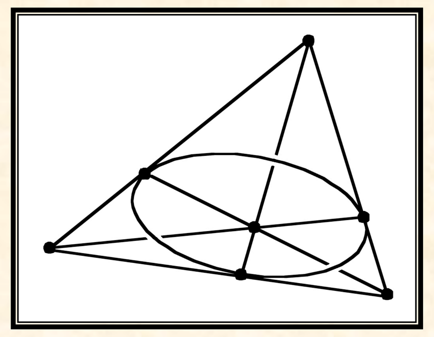
O. Veblen

J.H.M. Wedderburn

PIANI PROIETTIVI FINITI

Gli assiomi che definiscono un piano proiettivo possono applicarsi anche a insiemi finiti di punti e rette, situazione che si scosta dell'intuizione geometrica più immediata. Si hanno in questo caso i **piani proiettivi finiti.**

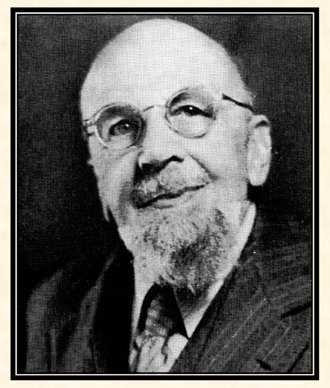
È chiaro che se un piano proiettivo finito è definito sopra un corpo, questo deve essere finito. Si dimostra che se il corpo ha p elementi, il piano proiettivo ha $1+p+p^2$ punti, e lo stesso numero $1+p+p^2$ di rette. In questo modo, il piano proiettivo finito *più piccolo* è definito sul corpo con due elementi, e risulta avere 7 *punti e 7 rette.* Questo piano di 7 punti si rappresenta come nella figura a lato, che mostra le incidenze di punti e rette. Un altro esempio importante di piano proiettivo finito è il piano proiettivo non desarguesiano di Veblen e Wedderburn: si tratta di *un piano proiettivo con 91 punti.* Questo piano non è algebrico, però esiste un altro piano proiettivo con 91 punti che invece lo è: è definito su un corpo finito con p=9 elementi (dato che in questo caso $1+p+p^2$=91).



Configurazione di Fano

La Geometria Proiettiva finita è stata presa in considerazione già da VON STAUDT, e formalizzata rigorosamente da matematici successivi. Tra questi va ricordato particolarmente GINO FANO (1871–1952): la configurazione del piano proiettivo con sette punti porta il suo nome.

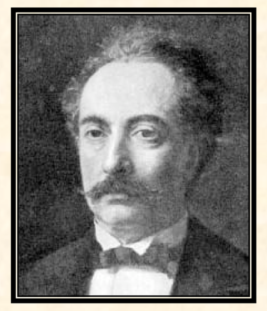
K.G.Ch. von Staudt



G. Fano

IL MODELLO PROIETTIVO DEL PIANO IPERBOLICO

Nel 1871 FELIX KLEIN presentò un *modello proiettivo di geometria non euclidea,* seguendo idee anteriori di EUGENIO BELTRAMI (1835–1900). Questo modello è utile per acquisire una visione globale del piano iperbolico e comprendere alcune sue peculiarità.

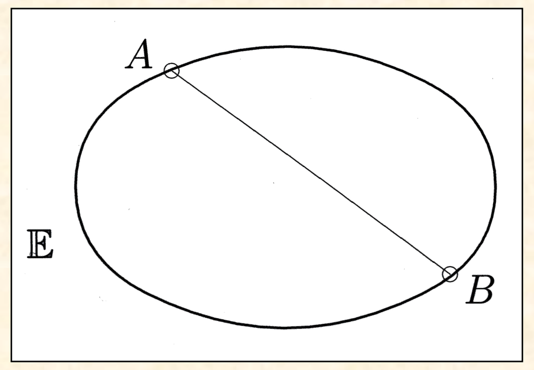


E. Beltrami

F. Klein

PUNTI E RETTE

Partendo da una conica E del piano proiettivo reale si considera il *piano iperbolico* come *formato dai punti interni di* E. Le rette di questo modello di piano iperbolico sono le stesse di quelle del piano proiettivo, però ridotte alla loro parte interna ad E. La conica E viene detta *assoluto del piano iperbolico.* Il disegno seguente riassume tutto ciò.

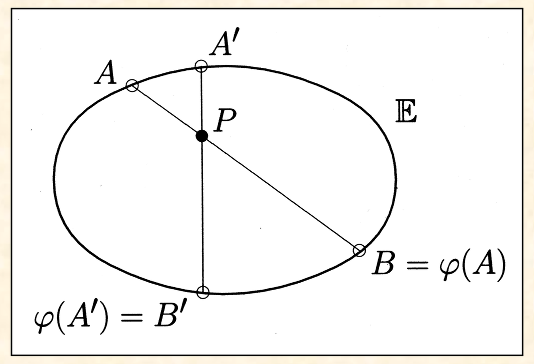


A e *B* non sono punti della retta del piano iperbolico, che pertanto è illimitata.

MOVIMENTI

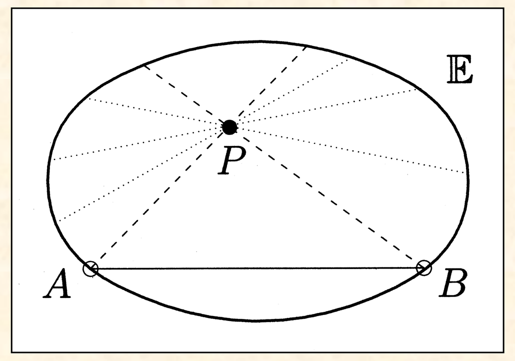
I *movimenti* di questo piano iperbolico sono quelli del piano proiettivo (le *collineazioni*) che lasciano invariante l'assoluto E. Ovviamente quello che interessa qui sono le restrizioni di tali collineazioni al piano iperbolico. Due figure del piano iperbolico sono da considerarsi uguali (o *congruenti*) se esiste un movimento che porta l'una nell'altra.

Esempio di movimento: una omologia φ di centro *P* che induce una involuzione sull'assoluto. Questo movimento si chiama *simmetria di centro P.*



PARALLELISMO

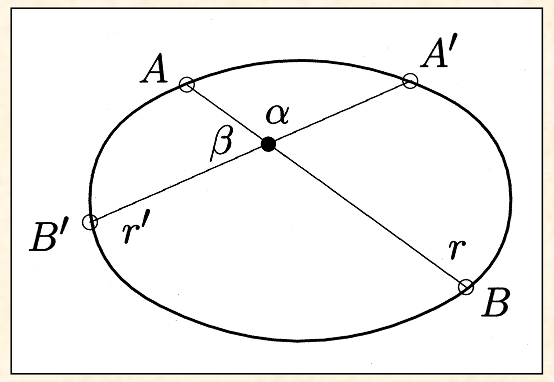
Osserviamo che nel piano iperbolico non è verificato il *Quinto Postulato di Euclide:* per un punto esterno ad una retta si posssono tracciare infinite rette che non la intersecano.

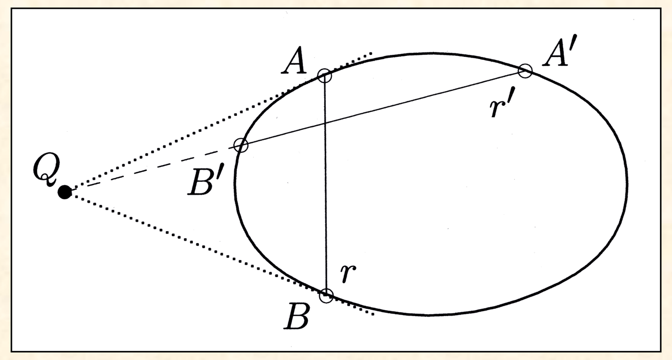


Le rette *PA* e *PB* si chiamano *parallele ad AB* e le altre *ultraparallele ad AB.*

PERPENDICOLARITÀ

Due rette r=AB e r'=$A'B'$ si dicono *perpendicolari* se esiste un movimento che sovrappone gli angoli adiacenti α e β (cioè se questi angoli adiacenti sono uguali o *congruenti*). In tal caso gli angoli α e β si dicono *retti.*

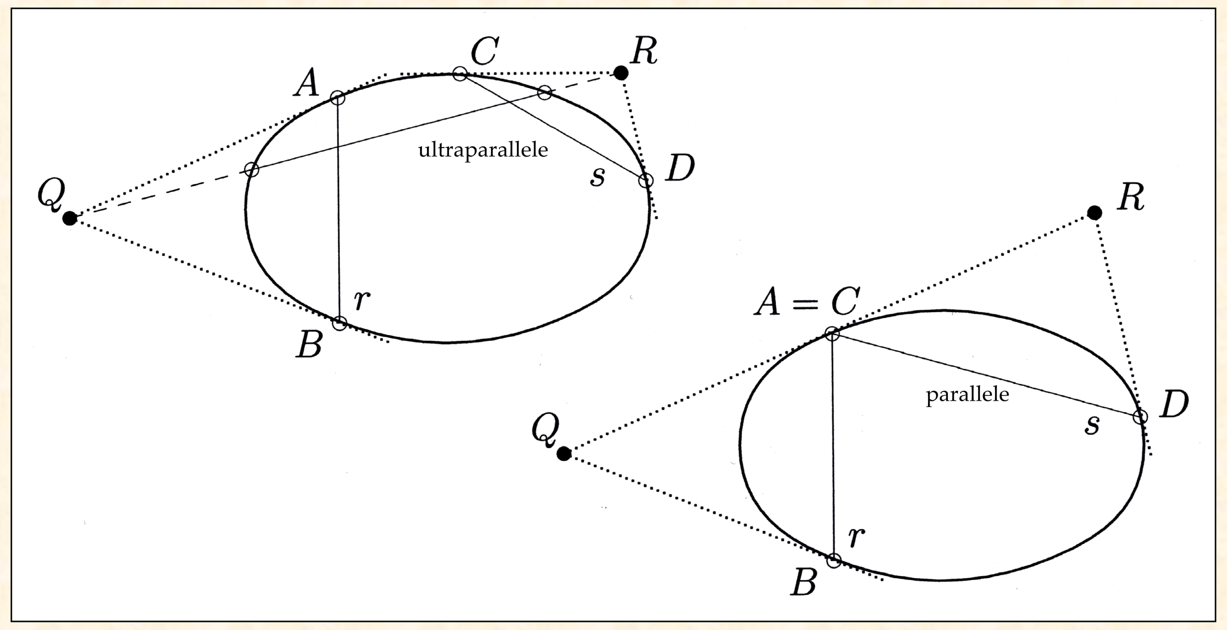




POLARITÀ

Si chiama *punto polare* di una retta r=AB il punto Q intersezione delle due tangenti a E nei punti A e B; questo punto del piano proiettivo non è nel piano iperbolico.

La polarità fornisce una formulazione proiettiva della perpendicolarità nel piano iperbolico, dato che si prova che *due rette sono perpendicolari se una passa per il punto polare dell'altra.*



Un fatto naturale per l'intuizione euclidea è che nel piano iperbolico *due rette ultraparallele hanno sempre una perpendicolare comune,* però questa stessa intuizione è contraria al fatto che *due rette parallele non la abbiano.*

Proyectos UCM de Innovación Educativa
Facultad de Ciencias Matemáticas, 2002

Edizione italiana a cura di Fabrizio Broglia e Jesús M. Ruiz
Università di Pisa, Dipartimento di Matematica, 2010

María Emilia Alonso • Departamento de Álgebra, UCM
María Cruz del Amo • IES Miguel Servet, Madrid
Raquel Mallavibarrena • Departamento de Álgebra, UCM
Isabel Pinto • IES La Fuensanta, Córdoba
Jesús M. Ruiz • Departamento de Geometría y Topología, UCM