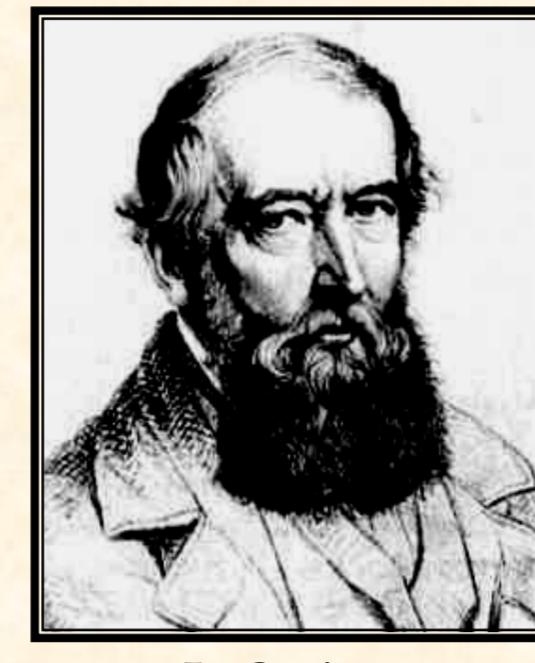


# ORIGINI DELLA GEOMETRIA PROIETTIVA

## MODELLI TOPOLOGICI DEL PIANO PROIETTIVO REALE

Il piano proiettivo reale è una superficie topologica compatta e chiusa (senza bordo). Un modo di costruirlo è quello di incollare un disco con un nastro di Möbius lungo i bordi; ciò mostra che si tratta di una superficie non orientabile. Come conseguenza si ha che il piano proiettivo non può immergersi nello spazio affine ordinario senza che appaiano autointersezioni e punti singolari. Lo studio di queste immersioni, dette modelli del piano proiettivo reale, è molto importante.

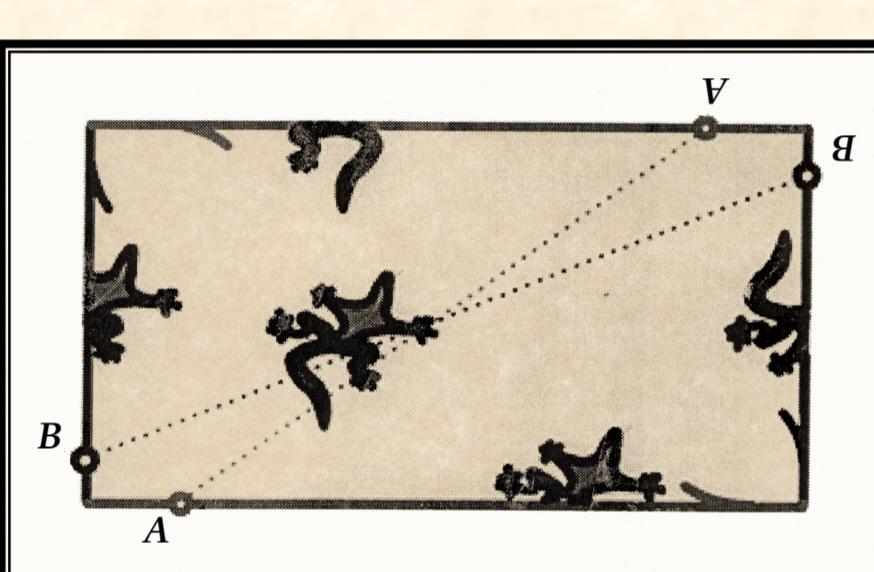
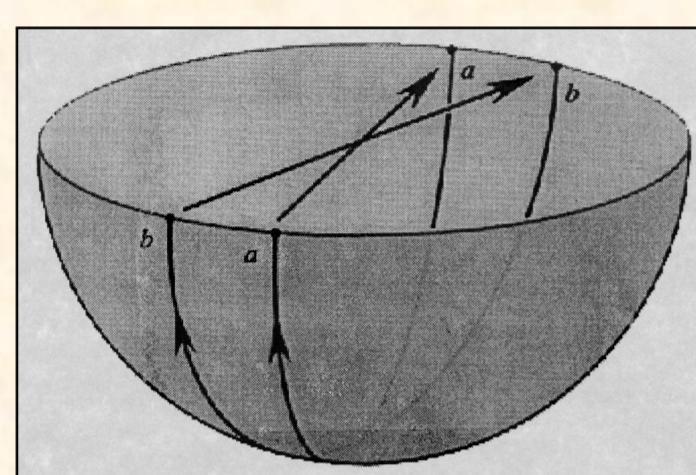
JACOB STEINER trovò nel 1853 un modo di fare immersioni di questo tipo, e i modelli che ottenne si chiamano oggi *superficie di Steiner*. Le più conosciute sono la *superficie romana* e la *crosscap*. Mezzo secolo dopo, nel 1901, WERNER BOY ne trovò una terza, che verrà chiamata in seguito *superficie di Boy*.



J. Steiner

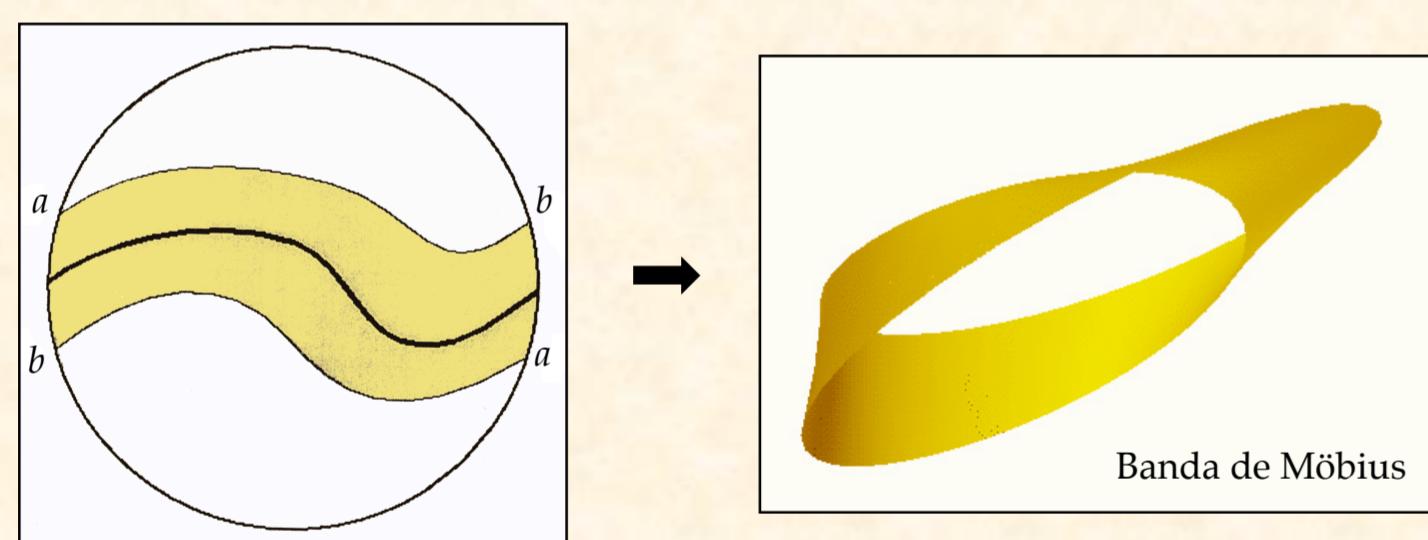
### IL NASTRO DI MÖBIUS NEL PIANO PROIETTIVO

La rappresentazione più diretta del piano proiettivo reale  $P$  è come l'insieme delle rette dello spazio affine  $\mathbb{R}^3$  passanti per l'origine. Poiché ognuna di queste rette interseca la sfera unitaria esattamente in due punti antipodali, si può ottenere  $P$  identificando nella sfera le coppie di punti antipodali. Se si prende solo una semisfera, è sufficiente identificare i punti antipodali del bordo. Ma una semisfera è la stessa cosa che un disco, così il piano proiettivo si ottiene a partire da un disco identificando le coppie di punti antipodali del suo bordo.

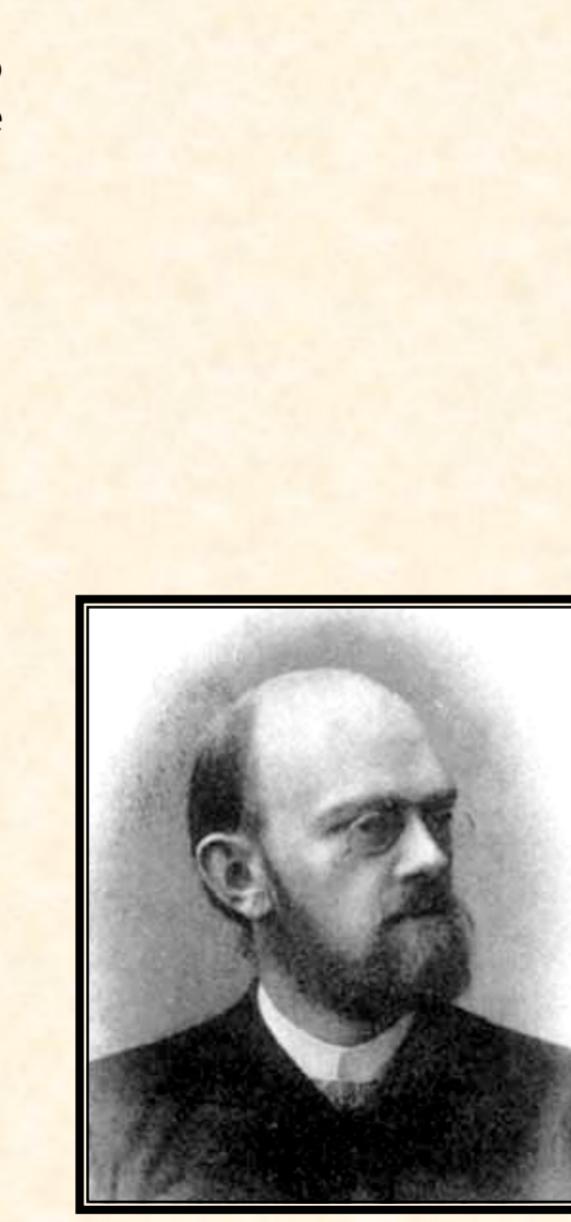


Lucertola piana che si muove nel piano proiettivo

Il nastro di Möbius si ottiene incollando in senso opposto gli estremi di un nastro piano. Se si considera questo nastro in un disco, quando si identificano le coppie di punti antipodali del bordo si ottiene dal nastro il nastro di Möbius, e dal disco il piano proiettivo: brevemente, si ottiene un nastro di Möbius dentro il piano proiettivo.



Osserviamo ora che il complementare del nastro è formato da due dischi dei quali si sono identificati parte dei corrispondenti bordi. Questa identificazione produce un disco solo e se ne conclude che effettivamente il piano proiettivo è l'unione del nastro di Möbius e di un disco.



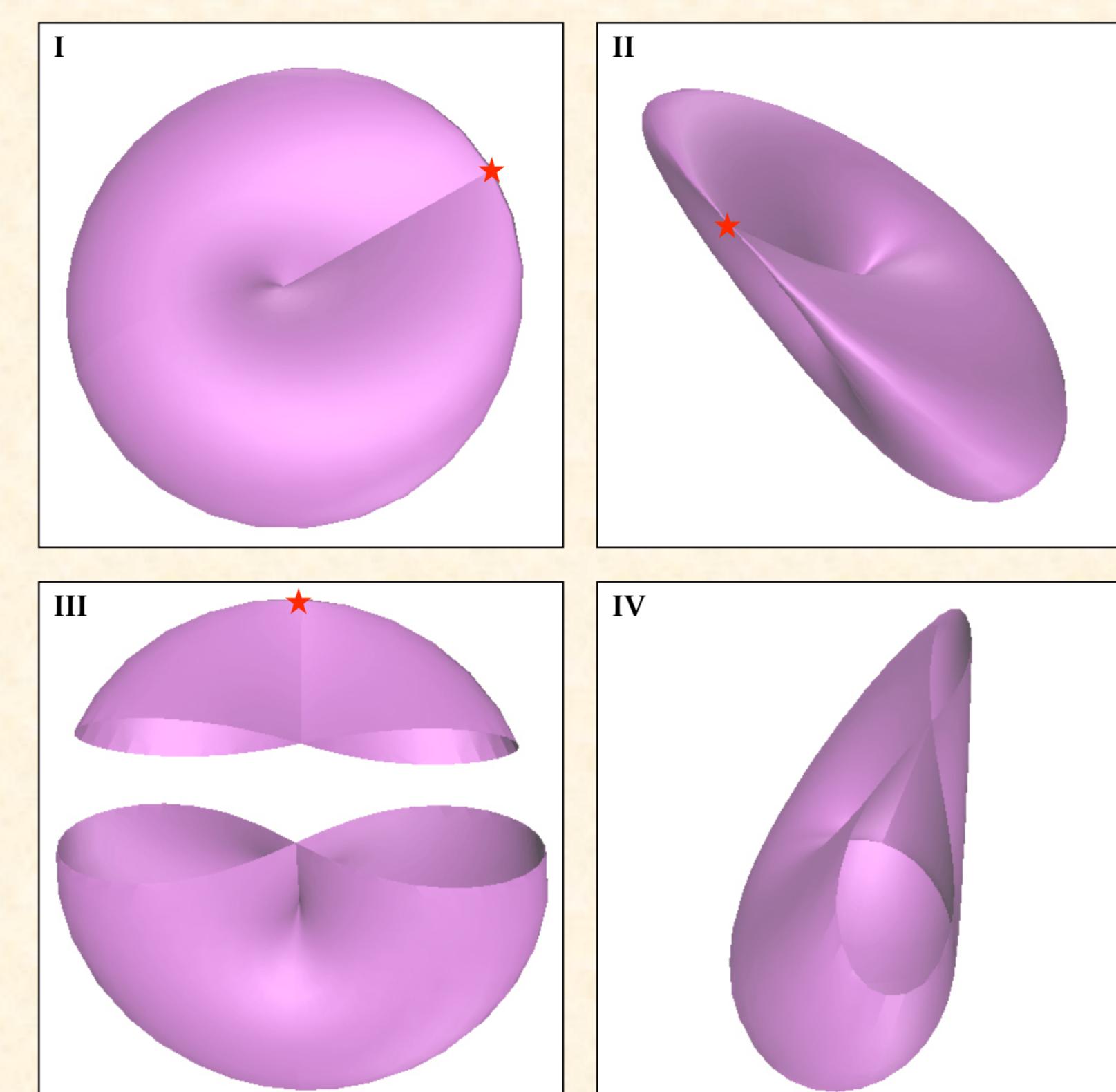
D. Hilbert



W. Boy

### CROSSCAP

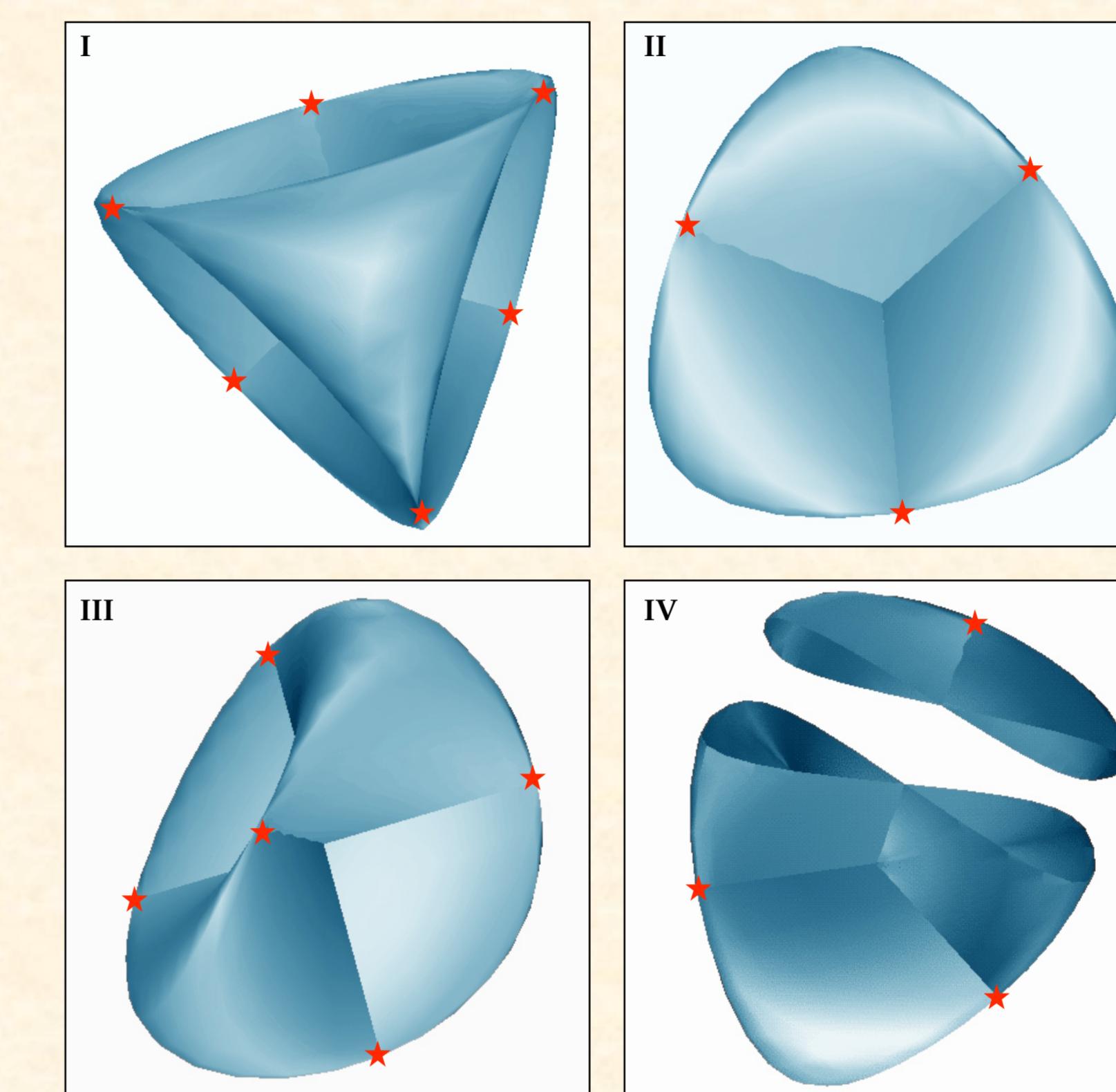
Questa superficie ha una linea di autointersezione che termina in due punti singolari.



- I. In questa immagine si distingue la linea di autointersezione insieme alle due singolarità.
- II. Questa immagine ruotata mostra meglio come avviene l'autointersezione.
- III. In questa prima sezione si vede facilmente che la parte superiore è un ombrello di Whitney, senza il manico, con il suo punto singolare.
- IV. Girando la superficie si vede meglio l'altro punto singolare.

### SUPERFICIE ROMANA

È una superficie con tre linee di autointersezione ognuna delle quali termina in due punti singolari. Le tre linee di autointersezione si intersecano a loro volta in un punto singolare triplo.



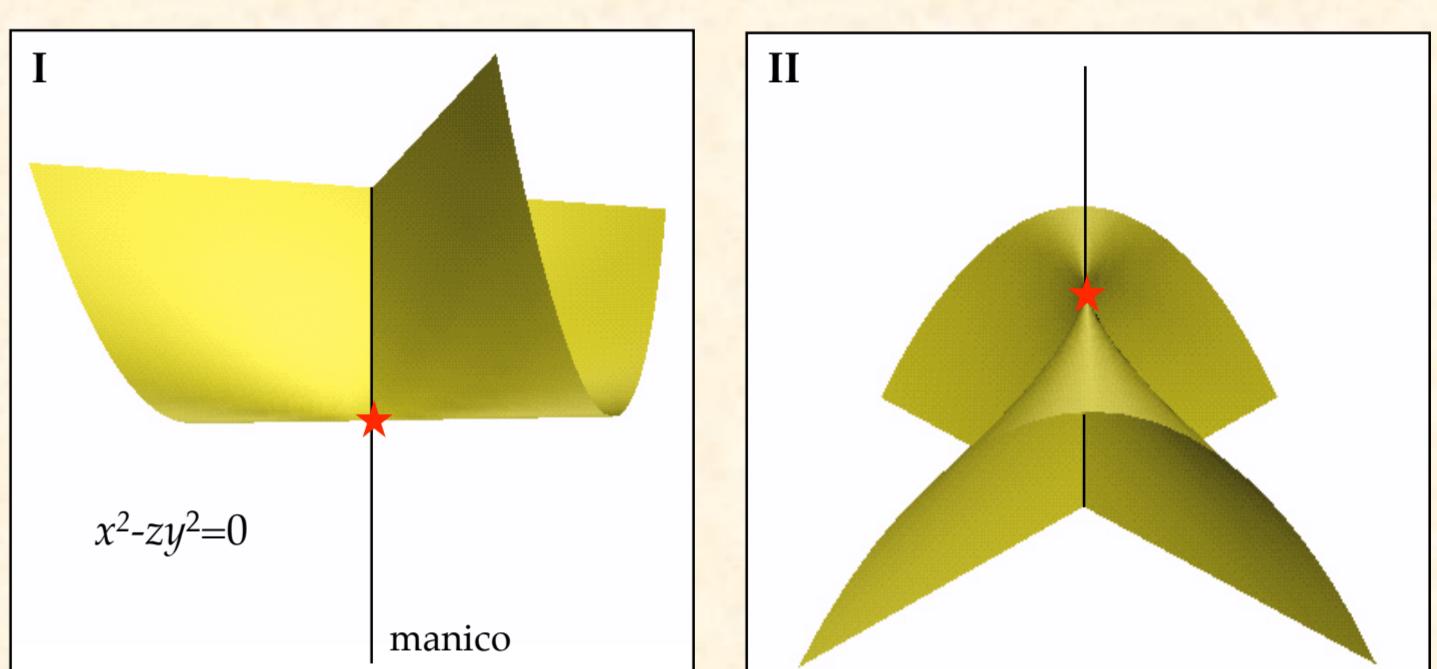
- I. In questa immagine le tre linee di autointersezione si vedono solo parzialmente, però si vedono tutti e sei i punti singolari.
- II. Dopo una rotazione della figura, appare la metà di ciascuna delle tre linee di autointersezione ed il punto singolare in cui esse si autointersecano.
- III. Ruotando ancora, si apprezza meglio il punto triplo.
- IV. Qui si è tagliata la superficie per veder meglio la natura dei punti di autointersezione.



H. Whitney

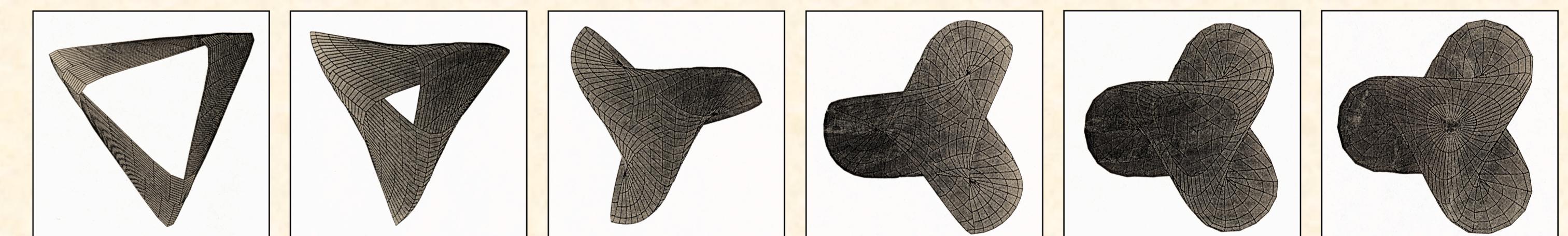
### SINGOLARITÀ DI WHITNEY

Tra i punti singolari della superficie di Steiner, appaiono quelli detti *di Whitney*, in onore di HASSLER WHITNEY (1907-1989). Si dice *ombrello* di Whitney la superficie algebrica di equazione implicita  $x^2-zy^2=0$ , che appare nella figura I. La figura II mostra un'altra prospettiva di questo ombrello.



L'asse delle coordinate  $z$  appare contenuto nella superficie, una metà come linea di autointersezione, l'altra come *manico* dell'ombrello. L'origine delle coordinate è il *punto singolare di Whitney*, che è indicato con una stella rossa. Lo stesso segno lo abbiamo utilizzato nelle immagini delle superficie di Steiner.

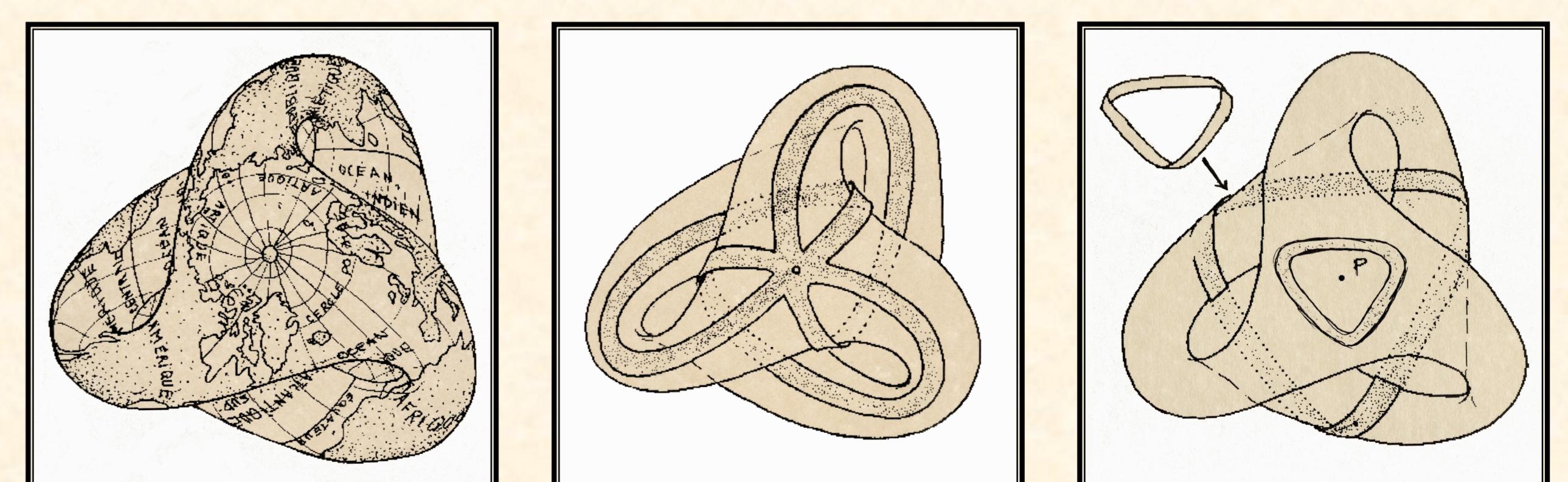
In queste immagini generate con MAPLE, si può osservare come espandendo la parametrizzazione di un nastro di Möbius si ottiene la superficie di Boy.



### IL PIANETA DI BOY

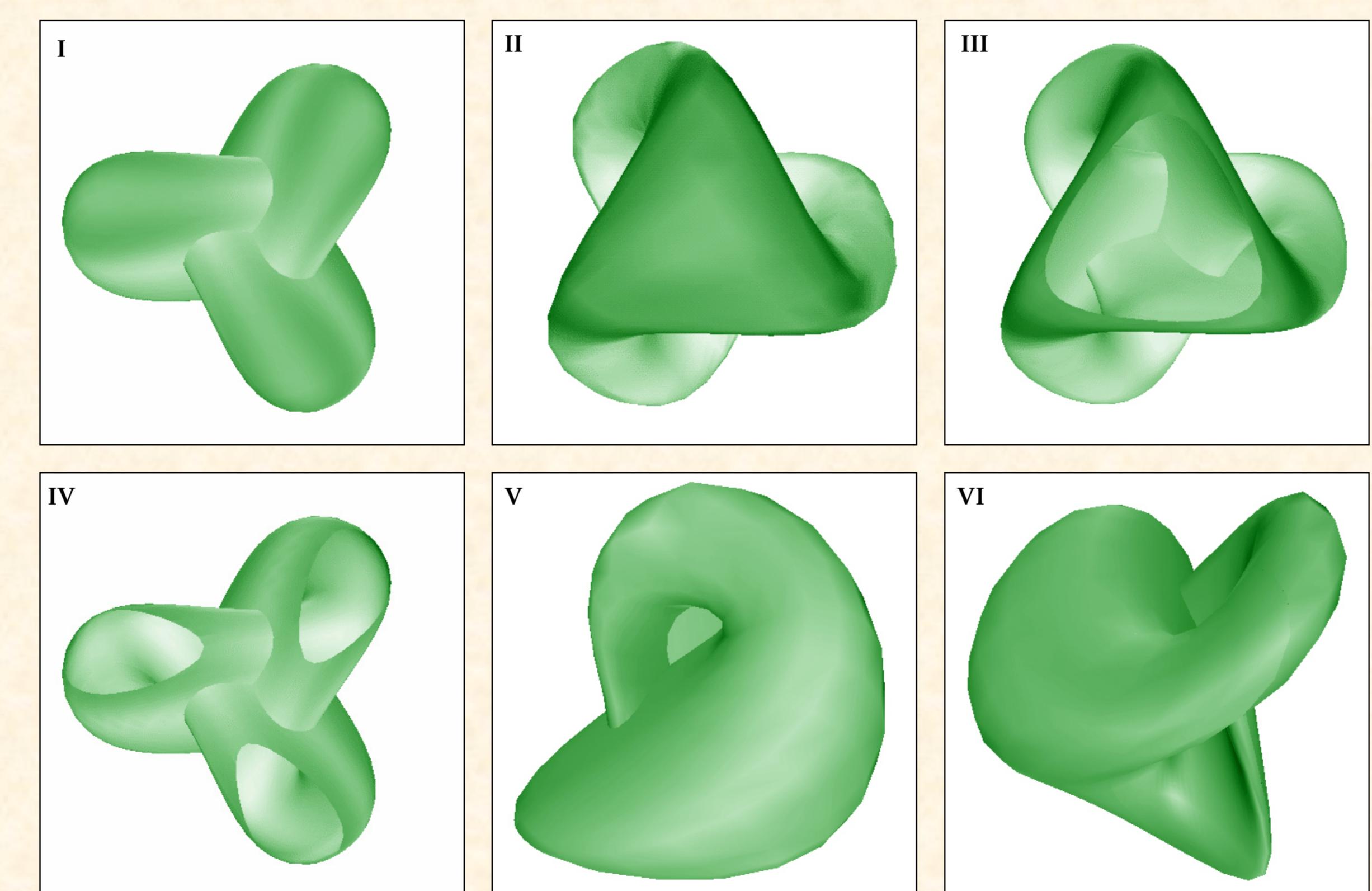
(secondo JEAN-PIERRE PETIT)

Anselme Lanturlu visita un pianeta nella Superficie di Boy, che ha il polo Nord e il Polo Sud nello stesso punto, ognuno in una faccia della superficie. Un cammino largo che percorre il pianeta dal Polo Nord al Polo Sud lungo un meridiano sarebbe un nastro di Möbius e lo stesso accadrebbe per l'Equatore. Comunque nessun altro cammino che seguì un parallelo intorno al polo Nord sarebbe un nastro di Möbius.



### LA SUPERFICIE DI BOY

Lo studio dei modelli di STEINER fece pensare a DAVID HILBERT (1862-1943) che immersando il piano proiettivo nello spazio affine nascono sempre punti singolari oltre alle curve di autointersezione. Propose quindi ad un suo studente, WERNER BOY (1879-1914), di dimostrarlo. Con sua sorpresa Boy provò il contrario, esibendo nel 1901 un modello di piano proiettivo reale che aveva solo linee di autointersezione. Questa superficie sarà chiamata in seguito *superficie di Boy*. La superficie di Boy ha una sola curva di autointersezione che si autocontra in un punto triplo.



- I. Questa vista mostra parte della curva di autointersezione, unitamente al punto ove si interseca con se stessa.
- II. Questa immagine ruotata nasconde tutte le autointersezioni.
- III. Qui si è aperta una finestra nell'immagine di fronte per vedere le autointersezioni.
- IV. In questo caso si sono aperte tre finestre per apprezzare meglio la struttura della superficie.
- V. Qui si mostra parte della curva di autointersezione.
- VI. Altra vista diversa della curva di autointersezione.