ORIGINI DELLA GEOMETRIA PROIETTIVA

INGREDIENTI ESSENZIALI

DESARGUES E PASCAL

Nel contesto dei lavori di prospettiva del Rinascimento e di fronte alla comparsa di nuovi problemi nel campo della **scienza applicata,** nascono nel secolo XVII varie figure chiave nel recupero delle conoscenze geometriche greche e nei nuovi punti di vista che daranno luogo più tardi alla nascita della Geometria Proiettiva. Oltre a KEPLERO che si orientò più verso l'Ottica e l'Astronomia, spiccano tre nomi: GIRARD DESARGUES, BLAISE PASCAL e PHILIPPE DE LA HIRE. Per l'importanza dei loro risultati noi ci concentreremo sui primi due.

GIRARD DESARGUES (1591–1661) nacque a Lione da famiglia agiata (sembra che fosse figlio di un notaio). Non si conosce nulla sui suoi studi finchè compare a Parigi nel 1626 nei circoli filosofici e scientifici vicini a CARTESIO (1596–1650), con cui fu legato da profonda amicizia. Nel 1628 è ingegnere militare a la Rochelle e alla fine della guerra lavora come architetto a Parigi al servizio del cardinal RICHELIEU. In questo periodo coltiva la amicizia di PIERRE DE FERMAT (1601–1605), GILLES PERSONNE DE ROBERVAL (1602–1675), MARIN MERSENNE (1588–1648) e dei PASCAL padre e figlio.

DESARGUES fu sostanzialmente un ingegnere ed un architetto, per cui le sue opere matematiche sono sempre orientate alle applicazioni pratiche. Molto presto i suoi nuovi metodi geometrici apparvero strani e sollevarono una ondata di critiche. Inoltre, lo stile è conciso, oscuro e con gran uso di termini strani, generalmente botanici, perchè fossero comprensibili a ingegneri e meccanici. Gli unici che riconobbero la qualità della sua opera furono i sopracitati CARTESIO, FERMAT, MERSENNE e PASCAL, mentre il resto dei suoi contemporanei lo bollarono come pazzo. DESARGUES era sufficientemente affezionato alla polemica ma stufo delle incomprensioni si ritirò a Lione nel 1650 ove visse fino alla sua morte.

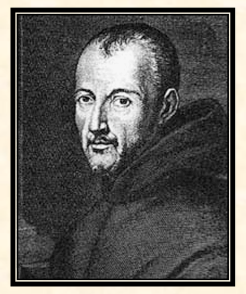
Cartesio
emesso nel terzo centenario del *Discorso del Metodo*

P. de Fermat
emesso nel quarto centenario della sua nascita

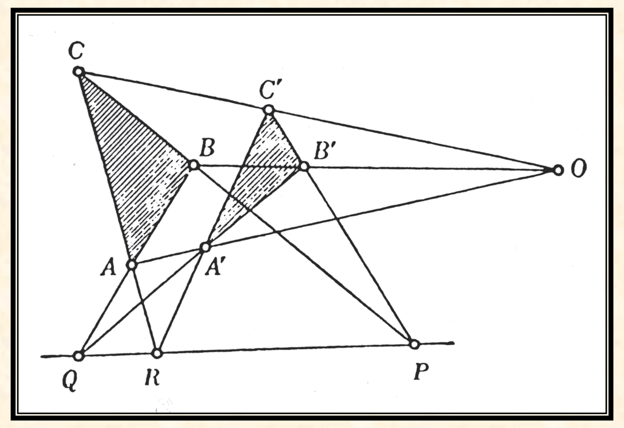
BLAISE PASCAL (1623–1662) fu un bambino precoce entusiasmato dalla geometria. A 11 anni suo padre lo portava alle sedute dell'"Accademia Mersenne", ove entrò in contatto con DESARGUES. Questi lo incoraggiò a usare il suo *metodo di proiezione e sezione* e Pascal a 16 anni pubblicò il famoso lavoro *Essay pour les coniques* ove compare il teorema che porta il suo nome. Questo teorema è uno dei più belli e suggestivi della matematica.

La figura di PASCAL è molto importante anche in altre materie come la **idrostatica** *(legge di Pascal).* Lo si può considerare il fondatore del **calcolo delle probabilità** ("geometria del caso") ed i suoi contributi sono fondamentali anche nel **calcolo combinatorio**. L'ultima parte della sua vita fu caratterizzata per i suoi contributi filosofici frutto delle sue forti convinzioni religiose.

B. Pascal
emesso nel 350º anniversario della sua nascita



M. Mersenne



Teorema di Desargues nel piano

DESARGUES studia:

- le sezioni coniche e i punti all'infinito,
- l'invarianza del *birapporto* e delle *quaterne armoniche,*
- le teoria delle *polari* e, ovviamente,
- il famoso:

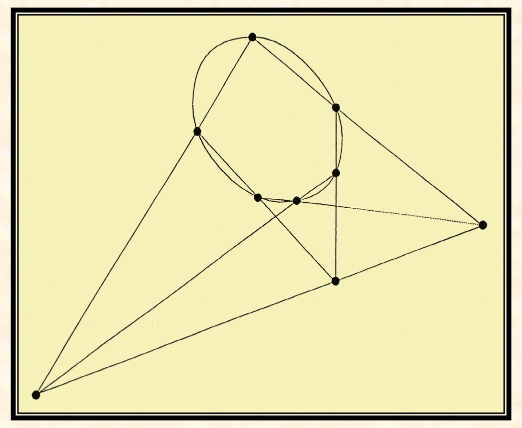
Teorema di Desargues

Se si proietta un triangolo di un piano proiettivo di vertici *A,B,C,* da un punto O, otteniamo un altro triangolo di vertici *A′,B′,C′,* e diciamo che questi due triangoli sono prospettivi da *O.* Pertanto, *due triangoli sono prospettivi se e soltanto se i lati corrispondenti si intersecano in tre punti allineati.*

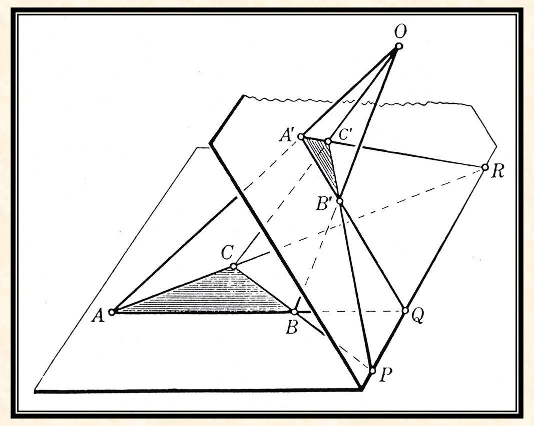
Teorema di Pascal

In un esagono iscritto in una conica, i punti di intersezione delle coppie di lati opposti sono allineati.

In generale un esagono non è inscrivibile in una conica, ed il teorema di Pascal esprime la condizione meravigliosamente semplice affichè lo sia. Per questo alla figura corrispondente fu dato il nome di *esagramma mistico*.



Esagramma mistico di Pascal



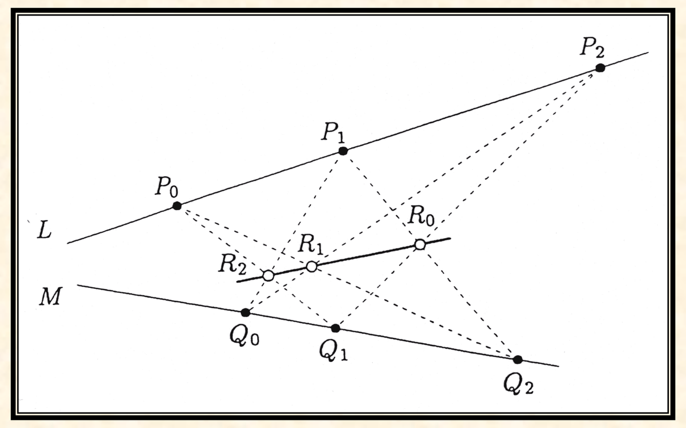
Teorema di Desargues nello spazio

Il teorema di Desargues ha una versione nello spazio di dimostrazione quasi immediata. In effetti se i due triangoli sono in due piani differenti dello spazio proiettivo, i punti *P,Q,R,* di intersezione dei lati corrispondenti sono nell'intersezione dei due piani, *che è una retta.* Il teorema di Desargues si può vedere come un caso limite di questo quando i due piani vanno a confondersi in uno.

Il seguente teorema classico può considerarsi come "il caso non regolare" di quello di Pascal.

Teorema di Pappo

Siano L e M due rette distinte del piano proiettivo. Se P_0, P_1, P_2 sono in L e Q_0, Q_1, Q_2 in M, e nessuno di questi è il punto di intersezione delle due rette, allora *i tre punti di intersezione* (1) R_0 di P_1Q_2 con P_2Q_1, (2) R_1 di P_0Q_2 con P_2Q_0, e (3) R_2 di P_0Q_1 con P_1Q_0, *sono allineati.*



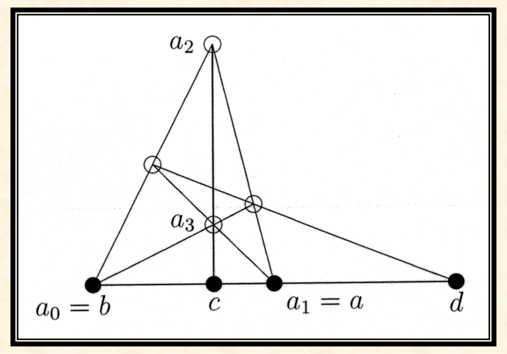
Purtroppo il XVII secolo non era il momento adatto per la geometria pura. I problemi scientifici del momento richiedevano metodi algebrici più efficaci per i calcoli necessari alla tecnologia. Per questo, la Geometria Proiettiva fu abbandonata a favore della Geometria Analitica, l'Algebra ed il Calcolo Infinitesimale. I risultati di DESARGUES, PASCAL E DE LA HIRE furono dimenticati fino agli inizi del secolo XIX quando ci fu la rinascita della geometria pura.

BIRAPPORTO

La domanda di ALBERTI, "che cosa si conserva per proiezione se non lo fanno né la lunghezza né gli angoli?", porta a studiare quando un certo numero di punti in una retta possono essere trasformati (mediante successive proiezioni) in altrettanti punti assegnati di un'altra. Se si hanno tre punti ciò è sempre possibile. L'invariante numerico che interviene per quattro punti *A,B,C* e *D* è il *birapporto:* $(CA/CB) : (DA/DB)$, dunque *quattro punti allineati possono essere portati in altri quattro punti allineati se e solo se il birapporto dei primi è lo stesso di quello dei secondi.*

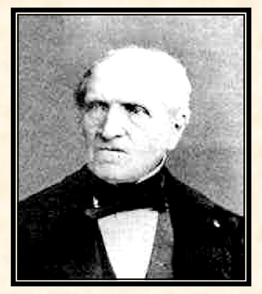
Già PAPPO conosceva questo rapporto e aveva provato la sua invarianza, però non in termini di proiezioni e sezioni. Curiosamente, un risultato analogo per la **geometria sferica** era stato provato da MENELAO nella sua *Spherica.*

DESARGUES si occupa del birapporto e della sua invarianza in una delle sue opere. Quando il birapporto è -1 si dice che siamo in presenza di una *quaterna armonica* e DESARGUES ottenne un metodo per la *costruzione del quarto armonico,* cioè dati tre punti allineati *a,b* e *c*, si vuole costruire un quarto punto *d*, allineato con questi e tale che il birapporto di *a,b,c* e *d* sia -1; questo quarto punto *d* si chiama *quarto armonico* di *c* rispetto a *a* e *b.*



Nel secolo XIX KARL GEORG CHRISTIAN VON STAUDT (1798–1867) e MICHEL CHASLES (1793–1880) svilupparono la *teoria proiettiva del birapporto,* non solo per punti ma anche per *rette e piani di un fascio.*

K. G. Ch. von Staudt



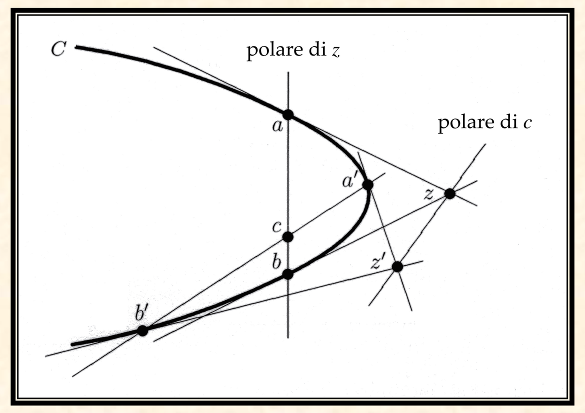
M. Chasles

POLARITÀ

Ha la sua origine in APOLONIO. Nel secolo XVII appare di nuovo in DESARGUES. I suoi metodi di proiezione e sezione gli permisero, a differenza di APOLONIO di lavorare prima su una circonferenza e poi ottenere gli stessi risultati per qualunque sezione conica. Nel secolo XIX la polarità recuperò di nuovo importanza in relazione con il concetto di **dualità.**

La relazione di *polarità rispetto ad una conica* associa ad ogni punto del piano una retta e viceversa nel modo seguente. Dato un punto *z* esterno ad una conica fissata *C*, possiamo tracciare le due tangenti da questo punto alla conica. La retta che unisce i due punti di intersezione delle tangenti con la conica si chiama *polare del punto z rispetto alla conica C*. Il punto z *è il polo della retta polare* costruita. Se il punto è sulla conica *la sua polare è la tangente alla conica* in questo punto.

Pertanto si stabilisce una relazione: *retta–punto* e *punto–retta* con una proprietà importante: *le polari dei punti c che sono nella polare di z passano per z.*



Polaritá rispetto ad una conica

Proyectos UCM de Innovación Educativa
Facultad de Ciencias Matemáticas, 2002
Edizione italiana a cura di Fabrizio Broglia e Jesús M. Ruiz
Università di Pisa, Dipartimento di Matematica, 2010

María Emilia Alonso • Departamento de Álgebra, UCM
María Cruz del Amo • IES Miguel Servet, Madrid
Raquel Mallavibarrena • Departamento de Álgebra, UCM
Isabel Pinto • IES La Fuensanta, Córdoba
Jesús M. Ruiz • Departamento de Geometría y Topología, UCM