ANALISI I

–14.11.2003–

1. Si consideri la successione definita da

$$\begin{cases} a_{n+1} & = 2a_n + a_{n-1} \\ a_0 & = 0 \\ a_1 & = 1 \end{cases}$$

   (i) Si mostri che $a_{n+1}a_{n-1} - a_n^2 = (-1)^n$.

   (ii) Si mostri che se $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ l'insieme

$$D := \{a_{n+1}a_{n-1} + \alpha a_n^2 \ : \ n \in \mathbb{N}\}$$

   non è limitato.

2. Sia $I_n := \{k \in \mathbb{N} \ : \ 1 \leq k \leq n\}$;

   (i) Si dica quante sono le funzioni $f : I_n \to I_m$ crescenti ed iniettive.

   (ii) Si dica quante sono le funzioni $f : I_n \to I_m$ crescenti e surgettive.

   (iii) Si provi che le funzioni $f : I_n \to I_m$ crescenti sono $\binom{n+m-1}{n}$.

   NB: una $f : I_n \to I_m$ si dice *crescente* se vale $f(k) \leq f(h)$ per ogni h e k con $k \leq h$.

3. (i) Si trovi un espressione esplicita per i prodotti

$$\prod_{k=n+1}^{2n} (1 + \frac{1}{k}), \qquad \prod_{k=n+1}^{2n} (1 - \frac{1}{k}).$$

   (ii) Si mostri che l'insieme

$$A := \{ \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \ : \ n \in \mathbb{N}^+\}$$

   è limitato; si dica inoltre se questo insieme ammette massimo o minimo.

   (iii) Detto $\alpha := \sup A$, si mostri che $\exp(\alpha) \geq 2$.

   (iv) Si mostri che in realtà $\exp(\alpha) = 2$.

Gli esercizi valgono, rispettivamente, 10, 11, 12 punti; il punteggio all'interno di ogni esercizio è equidistribuito.

È ammesso rispondere ad una domanda di un esercizio anche dando per acquisiti i risultati enunciati nei punti precedenti.