

ANALISI I

–29.01.2004–

1. Si discuta, al variare del parametro reale λ , la convergenza della serie¹

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\cos(\pi k)}{k(\cos(\pi k) + \lambda)}.$$

2. Si consideri la successione definita da

$$\begin{cases} x_0 = \alpha \geq 0 \\ x_{n+1} = \frac{2x_n}{x_n + 1} \end{cases}$$

- (a) Si trovi una espressione esplicita (in n ed α) per x_n .
- (b) Si dica per quali valori del parametro α la successione x_n ammette limite e, nel caso, lo si determini.
3. Sia $\{a_k : k \in \mathbb{N}\}$ un sottoinsieme (numerabile) della retta reale e si definisca $f : \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty]$ come

$$f(x) = \sum_{\{k \in \mathbb{N} : a_k \leq x\}} 2^{-k}.$$

- (a) Si mostri che f è limitata e (debolmente) crescente.
- (b) Si mostri che esistono i limiti

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

e li si calcoli.

- (c) Si mostri che f non è continua in $x = a_k$ per nessun valore di $k \in \mathbb{N}$.
- (d) Viceversa, si mostri che se $x_0 \neq a_k$ per ogni $k \in \mathbb{N}$ allora f è continua in x_0 .

¹Serie di J.B. Del Pollo (1713–1839).