1° Prova intermedia.

Corso di ANALISI FUNZIONALE

2007-2008

(1) Mostrare che se $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ sono misurabili e di misura positiva allora l'insieme $A+B$ ha parte interna non vuota.

(2) Provare o confutare: per ogni $p < +\infty$ Esiste $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R})$ tale che $\lim_{x\to q} f(x) = +\infty \ \forall q \in \mathbb{Q}$

(3) Calcolare

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 (1-x)^n \log x \, dx$$

---

(1) Possiamo supporre che $|A| < +\infty$. Posto $f(x) := \chi_A * \chi_B$ abbiamo che $\forall x \in \mathbb{R}^n$, f è continua, f non è identicamente nulla $\left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx = |A|\cdot|B|\right)$

(a) $f(x) \geq 0$ $\forall x \in \mathbb{R}^n$,

(b) Posto $U = \{x : f(x) > 0\}$, U è un aperto non vuoto. Inoltre $x_0 \in U \Rightarrow x_0 \in A+B$, infatti

$0 < f(x_0) = \int_{\mathbb{R}} \chi_A(x_0 - y)\, \chi_B(y)\, dy = |(A - x_0) \cap B|$ quindi $(A - x_0) \cap B \neq \emptyset \Rightarrow x_0 = a_0 + b_0$

quindi $U \subseteq A+B$ ✳

(2) Posto $\varphi(x) = \log^+ \left|\frac{1}{x}\right|$ si verifica che $\int_{\mathbb{R}} \varphi^p(x)dx = 2\int_0^1 \varphi^p(x)dx = \int_0^{+\infty} y^p e^{-y}\, dy = p!$

Quindi $f(x) := \sum_1^\infty \frac{1}{n!} \varphi(x - q_n)$ è normalmente convergente in $L^p(\mathbb{R})$ $\forall p \in [1, \infty[$

e soddisfa la condizione richiesta. ✳

(3)

$$\left.\begin{array}{l} 0 \leq |(1-x)^n \log x| \leq \log\left(\frac{1}{x}\right) \quad \forall x \in [0,1] \\ [x \mapsto \log\frac{1}{x}] \in L^1([0,1]) \\ (1-x)^n \log x \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad \forall x \in]0,1] \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{CONV. DOM.}} \lim_{n\to\infty} \int_0^1 (1-x)^n \log x \, dx = 0$$

✳