ANALISI FUNZIONALE

–11.1.2008–

1. Siano $f, g \in L^1(\mathbf{R})$ e si supponga inoltre che $f(x) = 0$ fuori da un compatto.
   (a) Dimostrare che se $f * g = 0$ allora almeno una delle due funzioni è nulla quasi ovunque.
   (b) Dire se (a) vale senza l'ipotesi che almeno una delle due funzioni abbia supporto compatto (esibire una dimostrazione o un controesempio).

2. (a) Provare che $G := L^2([0,1], \mathbf{Z})$ è un sottogruppo (additivo) chiuso di $L^2([0,1], \mathbf{R})$.
   (b) Provare che G è connesso per archi.
   (c) Provare che G è connesso per archi 1/2-hölderiani.

3. Siano A_n insiemi di misura finita tali che le caratteristiche χ_{A_n} convergano debolmente in $L^1([0,1])$ alla caratteristica di un insieme A. È vero che allora la convergenza è anche in norma L^1?

   (Si ricordi che una successione $f_n \in L^1([0,1])$ converge debolmente ad una $f \in L^1([0,1])$ se e solo se per ogni $g \in L^\infty([0,1])$ si ha $\int_0^1 f_n(x)g(x)dx \to \int_0^1 f(x)g(x)dx$)