

Università degli Studi di Pisa- Corso di laurea in Matematica
PROVA SCRITTA DI ELEMENTI DI ANALISI MATEMATICA

del 16 Dicembre 2009

Nome e Cognome: _____ Matricola: _____

1. Calcolare, qualora esista, il seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(1 + 2x)^{\ln(x)} - 1}{\sin(x) \ln(x^3)}.$$

2. Studiare la convergenza della seguente successione definita per ricorrenza

$$\begin{cases} a_{n+1} = \frac{a_n}{\sqrt{2 + a_n}} \\ a_0 = 2. \end{cases}$$

Discutere inoltre la convergenza della serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

3. Calcolare gli estremi superiore ed inferiore e gli eventuali punti di accumulazione dell'insieme

$$A = \left\{ \left(\frac{5}{n^2} - 1 \right)^n : n \in \mathbb{N}, n \geq 1 \right\}.$$

4. Studiare la convergenza della seguente serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n)!}{n^n n!}.$$

5. Sia $a_n > 0$ tale che $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n^2 < +\infty$. Dimostrare che $\forall \alpha > 1/2$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n^\alpha} < +\infty.$$

Dire, giustificando la risposta, se ciò rimane vero anche per $\alpha = 1/2$.