COMPITO DI E.A.M. del 04-06-2010

Esercizio 1

(1) Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{n\to\infty} n\ln n\left[e-\left(1+\frac{1}{n\ln n}\right)^{n\ln n}\right]$$

(2) studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n\in\mathbb{N}}\left[e-\left(1+\frac{1}{n\ln n}\right)^{n\ln n}\right](2\sin x)^n$$

al variare di $x\in\mathbb{R}$.

Esercizio 2

Sia

$$f(x):=x+\frac{1-e^x}{1+e^x}$$

(1) mostrare che $f(x)>0$ per ogni $x>0$;

(2) dimostrare che f è bigettiva e $g:=f^{-1}$ è derivabile;

(3) calcolare

$$g'(0),\qquad g''(0),\qquad \lim_{y\to+\infty} g'(y),\qquad \lim_{y\to 0}\frac{\sin(g(y))-g(\sin(y))}{y^2}$$

Esercizio 3 Calcolare i seguenti limiti:

(1)

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \sin(nx)\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}(nx)\right)dx;$$

(2)

$$\lim_{n\to\infty} e^{-n^2}\int_0^n [\ln(x+n)]^n e^{-nx}dx$$