PROVA SCRITTA DI ELEMENTI DI ANALISI MATEMATICA

del 16 Dicembre 2009

Correzione degli esercizi 2 e 3

2. Studiare la convergenza della seguente successione definita per ricorrenza

$$\begin{cases} a_{n+1} = \dfrac{a_n}{\sqrt{2+a_n}} \\ a_0 = 2. \end{cases}$$

Discutere inoltre la convergenza della serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

É facile dimostrare (per induzione) che $a_n > 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$: ciò è infatti vero per $n = 0$, inoltre se $a_n > 0$ allora a_{n+1} è ben definito e $a_{n+1} = a_n/\sqrt{2+a_n} > 0$. È anche facile verificare che $a_{n+1} < a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$: infatti, **dato che a_n è positiva**, si ha che

$$a_{n+1}/a_n = 1/\sqrt{2+a_n} \leq 1/\sqrt{2} < 1, \qquad (*)$$

e ciò, essendo la successione a termini positivi, implica che a_n è decrescente.

Dall'equazione (*) segue che

$$0 < a_n \leq 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n \qquad (**)$$

pertanto per il teorema dei due carabineri otteniamo $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$; inoltre, visto che vale la disuguaglianza (**), possiamo concludere, per il criterio del confronto, che la serie a termini positivi $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ converge.

3 Calcolare gli estremi superiore ed inferiore e gli eventuali punti di accumulazione dell'insieme

$$A = \left\{ \left(\frac{5}{n^2} - 1 \right)^n \; : \; n \in \mathbb{N},\, n \geq 1 \right\}.$$

Posto $x_n := (\frac{5}{n^2} - 1)^n$ si vede che $x_1 = 4$, $x_2 = 1/16$, mentre per $n \geq 3$ si ha che $-1 < \frac{5}{n^2} - 1 < 0$ e quindi per tali valori di n si ha

$$x_n = (-1)^n |x_n| \text{ con } |x_n| := (1 - \frac{5}{n^2})^n, \qquad |x_n| < 1. \tag{1}$$

Osserviamo inoltre che, per $n \geq 2$, applicando la disuguaglianza di Bernoulli si ottiene: $(1 - \frac{5}{n^2})^n \geq 1 - \frac{5}{n}$ Pertanto

$$1 - \frac{5}{n} \leq |x_n| \leq 1 \qquad \forall n \geq 3 \tag{2}$$

e, per il teorema dei due carabinieri, da ciò discende che $|x_n| \to 1$ per $n \to +\infty$.

Quindi possiamo trarre le conclusioni seguenti:

- $\sup A = \max A = 4$; infatti $4 \in A$ e, dato che $|x_n| < 1$ $\forall n \geq 3$, 4 maggiora ogni altro elemento di A (N.B.: l'essere il *minimo* dei maggioranti è garantito dal fatto di appartenere all'insieme A) ;
- sempre dal fatto che $|x_n| < 1$ $\forall n \geq 3$ segue che -1 è un minorante per A; d'altra parte dalle equazioni (2) e (1) si ha che, per n dispari,
$$-1 < x_n < -1 + 5/n \tag{3}$$
e quindi non possono esistere minoranti di A che siano più grandi di -1, cioé -1 è l'estremo inferiore di A;
- la discussione del punto precedente mostra che -1 è anche un punto di accumulazione per A, infatti in ogni intorno di -1 cadono (infiniti) elementi di A diversi da -1 stesso; un ragionamento analogo ci fa concludere che anche 1 è punto di accumulazione; inoltre se $\ell \in \mathrm{Acc(A)}$ allora esiste una sottosuccessione (x_{n_k}) tale che $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = \ell$. Di conseguenza $\lim_{k\to\infty} |x_{n_k}| = |\ell|$, e quindi $|\ell| = 1$; pertanto $\mathrm{Acc(A)} = \{\pm 1\}$.