Es 2 - versione 5

B è intersezione di due cilindri di ugual diametro.

(i) $(x,y,z) \in B_a \iff \begin{cases} x = a \\ |y| \leq \sqrt{9-a^2} \\ |z| \leq \sqrt{9-a^2} \end{cases} \quad (*)$

Se $|a| > 3$ il sistema (*) non ha soluzione, quindi $B_a \neq \emptyset$

Se $|a| \leq 3$ la proiezione di B_a sul piano y,z è un quadrato di lato $2\sqrt{9-a^2}$; pertanto B_a è un insieme limitato.

(ii) $$\mathrm{Vol}(B) = \int_{-3}^{3} \left(\int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} \int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} dy\, dz \right) dx = 4\int_{-3}^{3} (9-x^2)\, dx$$

$$= 144$$

(iii) Utilizzando il teorema della divergenza, unitamente al fatto che $\mathrm{div}\vec{F} = 1 + 2x$ otteniamo

$$\mathrm{Flux}_{\partial B}(\vec{F}) = \iint_{\partial B} \vec{F} \cdot \vec{n}\, dS = \iiint_B \mathrm{div}\vec{F}\, dx dy dz = \iiint_B 1\, dx dy dz + \iiint_B x\, dx dy dz$$

Dato che, per ragioni di simmetria, $\iiint_B x\, dx dy dz = 0$ si ha

$$\mathrm{Flux}_{\partial B}(\vec{F}) = \iiint_B dx dy dz = 144$$

ES 3 - Versione ~~B~~ 3

NB: il dominio di $\vec{F}$ <u>non è</u> semplicemente connesso, pertanto non basta verificare che $\operatorname{rot} \vec{F} = 0$ per concludere che $\vec{F}$ è conservativo.

Possiamo tuttavia calcolare direttamente il potenziale U; infatti dal fatto che ~~...~~

~~...~~ $\frac{\partial U}{\partial x}(x,y,z) = F_1(x,y,z) = \frac{2xz}{x^2+y^2} - yz - 3$

segue che

$$U(x,y,z) = z\log(x^2+y^2) - xyz - 3x + h(x,y)$$

Imponendo le condizioni

$$\frac{\partial U}{\partial y}(x,y,z) = F_2(x,y,z) \quad \text{e} \quad \frac{\partial U}{\partial z}(x,y,z) = F_3(x,y,z)$$

ricaviamo che $\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial h}{\partial y} = 0$ e quindi $h \equiv \text{cost}$

Inoltre dalla condizione $U(0,1,0) = 0$ ~~...~~ deduciamo che $h \equiv 0$.

Es 2 - Versione ξ

B è intersezione di due cilindri di ugual diametro

(i)
$$(x,y,z)\in B_a \Longleftrightarrow \begin{cases} y=a \\ |x|\leq\sqrt{4-a^2} \\ |z|\leq\sqrt{4-a^2} \end{cases} \qquad (*)$$

Se $|a|>2$ il sistema $(*)$ non ammette soluzione, quindi $B_a=\emptyset$

Se $|a|\leq 2$ la proiezione di B_a sul piano x,z è un quadrato di lato $2\sqrt{4-a^2}$; pertanto B_a è un insieme limitato.

(ii)
$$\mathrm{Vol}(B)=\int_{-2}^{2}\left(\int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}}\int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} dx\,dz\right)dy = 4\int_{-2}^{2}(4-y^2)\,dy = \frac{128}{3}$$

(iii) Utilizzando il ~~[illegible]~~ teorema della divergenza unitamente al fatto che $\operatorname{div}\vec{F}=2y$ ottoniamo

$$\mathrm{Flux}_{\partial B}(\vec{F})=\iint_{\partial B}\vec{F}\cdot\vec{n}\,dS=\iiint_B \operatorname{div}\vec{F}\,dx\,dy\,dz = 2\iiint_B y\,dx\,dy\,dz$$

E, per ragioni di simmetria, quest'ultimo integrale fa zero, pertanto
$$\mathrm{Flux}_{\partial B}(\vec{F})=0.$$

Es 3 - Versione ξ

NB: il dominio di $\vec{F}$ <u>non è</u> semplicemente connesso, pertanto non basta verificare che $\mathrm{rot}\,\vec{F} = 0$ per concludere che $\vec{F}$ è conservativo.

Possiamo tuttavia procedere al calcolo diretto del potenziale U: infatti, dalla condizione

$$\frac{\partial U}{\partial x}(x,y,z) = F_1(x,y,z) = \frac{z\,x}{x^2+y^2} + yz$$

segue che $\quad U(x,y,z) = \frac{z}{2}\log(x^2+y^2) + xyz + h(y,z)$

~~mentre~~ Imponendo le condizioni
$$\frac{\partial U}{\partial y}(x,y,z) = F_2(x,y,z)$$
$$\frac{\partial U}{\partial z}(x,y,z) = F_3(x,y,z)$$

ricaviamo che $\quad \frac{\partial h}{\partial y}(y,z) = -3 \quad ; \quad \frac{\partial h}{\partial z}(y,z) = 0$

di conseguenza $\quad h(y,z) = -3y + c \quad$ e quindi

$$U(x,y,z) = \frac{z}{2}\log(x^2+y^2) + xyz - 3y + c$$

Infine dalla condizione $U(1,0,0) = 0$ ricaviamo che $c = 0$.