

Università degli studi di Pisa – Corso di Laurea in Ingegneria Biomedica  
PROVA SCRITTA di ANALISI MATEMATICA II

26 gennaio 2015

1. Si consideri la funzione definita da

$$f(x, y) = x^2 - xy + y^4 .$$

- (i) Trovare e classificare i punti stazionari di  $f$ .
- (ii) Determinare  $\sup_{\mathbb{R}^2} f$  e  $\inf_{\mathbb{R}^2} f$ .
- (iii) Detto  $Q = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 5\}$ , calcolare

$$\inf_{(x,y) \in Q} f(x, y). \quad \sup_{(x,y) \in Q} f(x, y),$$

specificando se si tratta di massimi o minimi.

2. Si consideri l'applicazione  $\Phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  definita da

$$\Phi(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy) .$$

- (i) Mostrare che  $\Phi$  è localmente invertibile in  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ .
- (ii) Detto  $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - 3)^2 + y^2 \leq 4\}$ , mostrare che  $\Phi$  è iniettiva in  $C$ . (*Si consiglia di usare l'espressione in coordinate polari di  $\Phi$* ).
- (iii) calcolare l'area dell'insieme  $\Phi(C)$ .

3. Sia  $P \subset \mathbb{R}^2$  il pentagono di vertici  $(0, 0)$ ,  $(2, 0)$ ,  $(4, 2)$ ,  $(2, 2)$ ,  $(0, 1)$ .

- (i) Calcolare il volume del solido  $V$  ottenuto ruotando  $P$  intorno all'asse delle  $x$ .
- (ii) Calcolare il flusso uscente da  $V$  del campo

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (y^3 + x, y^3 + z, z^3 + y) .$$

In questa seconda parte le risposte ad ogni domanda devono essere giustificate. Risposte giuste ma non giustificate non saranno considerate valide. È consentito l'utilizzo di libri, appunti e calcolatrice (non grafica). Qualunque altra apparecchiatura elettronica va lasciata spenta nella propria borsa o giacca. L'inosservanza di questa norma è considerata *tentativo di frode* e comporta automaticamente l'annullamento della prova

Università degli studi di Pisa – Corso di Laurea in Ingegneria Biomedica  
PROVA SCRITTA di ANALISI MATEMATICA II

26 gennaio 2015

1. Si consideri la funzione definita da

$$f(x, y) = x^4 - xy + y^2$$

- (i) Trovare e classificare i punti stazionari di  $f$ .
- (ii) Determinare  $\sup_{\mathbb{R}^2} f$  e  $\inf_{\mathbb{R}^2} f$ .
- (iii) Detto  $Q = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 2\}$ , calcolare

$$\inf_{(x,y) \in Q} f(x, y). \quad \sup_{(x,y) \in Q} f(x, y),$$

specificando se si tratta di massimi o minimi.

2. Si consideri l'applicazione  $\Phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  definita da

$$\Phi(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy) .$$

- (i) Mostrare che  $\Phi$  è localmente invertibile in  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  .
- (ii) Detto  $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + (y - 2)^2 \leq 1\}$ , mostrare che  $\Phi$  è iniettiva in  $C$ . (*Si consiglia di usare l'espressione in coordinate polari di  $\Phi$* ).
- (iii) calcolare l'area dell'insieme  $\Phi(C)$  .

3. Sia  $P \subset \mathbb{R}^2$  il pentagono di vertici  $(0, 0)$ ,  $(2, 0)$ ,  $(4, 2)$ ,  $(2, 2)$ ,  $(0, 1)$  .

- (i) Calcolare il volume del solido  $V$  ottenuto ruotando  $P$  intorno all'asse delle  $y$ .
- (ii) Calcolare il flusso uscente da  $V$  del campo

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (x^3 + z, z^3 + y, z^3 + x) .$$

In questa seconda parte le risposte ad ogni domanda devono essere giustificate. Risposte giuste ma non giustificate non saranno considerate valide. È consentito l'utilizzo di libri, appunti e calcolatrice (non grafica). Qualunque altra apparecchiatura elettronica va lasciata spenta nella propria borsa o giacca. L'inosservanza di questa norma è considerata *tentativo di frode* e comporta automaticamente l'annullamento della prova