

1 Esponenziale e logaritmo.

1.1 Risultati preliminari.

Lemma 1

$$a^n - b^n = (a - b) \left(\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-k-1} \right). \quad (1)$$

Lemma 2 (Disuguaglianza di Bernoulli)

$$(1 + \alpha)^n \geq 1 + n\alpha$$

per ogni $\alpha \geq -1$ e per ogni $n \in \mathbb{N}$

Teorema 1 (Disuguaglianza delle medie) Per ogni $n \in \mathbb{N}$, per ogni n -upla $\{a_k\}_{1 \leq k \leq n}$ di numeri reali positivi è verificata la seguente disuguaglianza

$$\sqrt[n]{\prod_{k=1}^n a_k} \leq \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k \right). \quad (2)$$

La dimostrazione di lemmi è un facile; procediamo dunque alla dimostrazione della disuguaglianza delle medie.

Dimostrazione Lemma 1 Sia $\mathcal{P}(n)$ il predicato

“l’equazione $\prod_{k=1}^n a_k \leq \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k \right)^n$ è verificata per ogni n -upla $\{a_k\}_{1 \leq k \leq n}$ di numeri reali positivi.”

Osserviamo innanzitutto che $\mathcal{P}(n)$ è banalmente vera se $n = 1$ mentre per $n = 2$ si verifica immediatamente che

$$a_1 a_2 = \left(\frac{a_1 + a_2}{2} \right)^2 - \left(\frac{a_1 - a_2}{2} \right)^2 \leq \left(\frac{a_1 + a_2}{2} \right)^2 \quad (3)$$

Vorremmo procedere per induzione sul numero di elementi dell’ n -upla, ovvero dimostrare che se $\mathcal{P}(n)$ è vera allora è vera anche $\mathcal{P}(n+1)$. Purtroppo questo passaggio non è semplice e richiede un piccolo trucco: dimostreremo infatti che

(i) $\mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(2n)$.

(ii) Se $\mathcal{P}(n)$ è vera allora $\mathcal{P}(m)$ è vera per ogni $m \leq n$.

Quindi per passare da n a $n+1$ procederemo nel modo seguente:

$$\mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(2n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$$

dove la prima implicazione è vera grazie a (i) e la seconda grazie a (ii) unitamente al fatto che $2n \geq n+1 \quad \forall n \geq 1$.

Per dimostrare (i) procediamo nella maniera seguente:

$$\prod_{k=1}^{2n} a_k = \left(\prod_{k=1}^n a_k \right) \cdot \left(\prod_{k=1}^n a_{n+k} \right)$$

quindi supposta $\mathcal{P}(n)$ vera otteniamo

$$\left(\prod_{k=1}^n a_k \right) \cdot \left(\prod_{k=1}^n a_{n+k} \right) \leq \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k \right)^n \cdot \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_{n+k} \right)^n = \left[\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k \right) \cdot \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_{n+k} \right) \right]^n \quad (4)$$

ma, utilizzando la disuguaglianza (3) osserviamo che

$$\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k\right) \cdot \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_{n+k}\right) \leq \left[\frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_{n+k}\right)\right]^2 = \left[\frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{2n} a_k\right]^2$$

e sostituendo l'espressione trovata al secondo membro dell'equazione (4) terminiamo la dimostrazione del punto (i).

Dimostriamo allora (ii): supponiamo che $\mathcal{P}(n)$ sia vera, dato $m \leq n$ e data comunque una m -upla $\{a_k\}_{1 \leq k \leq m}$ definiamo

$$\mu = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m a_k, \quad b_k = \begin{cases} a_k & k \leq m \\ \mu & k > m \end{cases} \quad (5)$$

Osservando che

$$\prod_{k=1}^n b_k = \mu^{n-m} \prod_{k=1}^m a_k, \\ \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n b_k = \frac{1}{n} (\sum_{k=1}^m a_k + (n-m)\mu) = \frac{1}{n} (m\mu + (n-m)\mu) = \mu$$

si verifica facilmente che applicando la disuguaglianza (2) all' n -upla $\{b_k\}_{1 \leq k \leq n}$ si ottiene la disuguaglianza

$$\mu^{n-m} \prod_{k=1}^m a_k \leq \mu^n$$

quindi o $a_k = 0 \quad \forall k$ (nel qual caso non c'è nulla da dimostrare) oppure $\mu > 0$ e dunque dividendo entrambi i membri per la quantità (positiva!) μ^{n-m} e ricordando la definizione di μ otteniamo la tesi. $\#$

Esercizi:

1. Dimostrare il lemma 1.
2. Dimostrare il lemma 2. Dimostrare inoltre che la disuguaglianza non è vera in generale senza l'ipotesi $\alpha \geq -1$ e individuare nella dimostrazione i passaggi in cui tale ipotesi viene utilizzata.
3. Dimostrare che la disuguaglianza delle medie si riduce ad un'uguaglianza se e solo se gli a_n sono tutti uguali.
4. Dimostrare la disuguaglianza tra media geometrica e media armonica, ovvero che se $\{b_k\}_{1 \leq k \leq n}$ è una n -upla di numeri strettamente positivi allora

$$\frac{n}{\sum_{k=1}^n (1/b_k)} \leq \sqrt[n]{\prod_{k=1}^n b_k}.$$

[Suggerimento: porre $a_k = (1/b_k)$ e utilizzare la disuguaglianza (2).]

1.2 La funzione esponenziale in base naturale.

Sia $x \in \mathbb{R}$, consideriamo la successione di polinomi definita da

$$p_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \quad \text{dove } n \in \mathbb{N} :$$

Poniamo $\exp(x) \stackrel{def}{=} \lim_{n \rightarrow +\infty} p_n(x)$. Al fine di studiare le proprietà della funzione $\exp(x)$ procederemo per piccoli passi successivi:

(a) Per ogni $x \in \mathbb{R}$ fissato la successione $(p_n(x))_n$ è crescente per $n > -x$. Pertanto

$$\exp(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} p_n(x) = \sup\{p_n(x) : n > -x\}.$$

Infatti posto

$$\alpha_k = \begin{cases} 1 + \frac{x}{n} & 1 \leq k \leq n \\ 1 & k = n + 1 \end{cases}$$

quindi, applicando la disuguaglianza delle medie agli $n + 1$ numeri positivi α_k

$$\left(\frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k \right)^{n+1} \geq \prod_{k=1}^{n+1} \alpha_k$$

cioè, sostituendo nella formula sopra l'espressione esplicita degli α_k ed elevando entrambi i membri a potenza $n + 1$ -esima otteniamo

$$p_{n+1}(x) = \left(1 + \frac{x}{n+1} \right)^{n+1} \geq \left(1 + \frac{x}{n} \right)^n = p_n(x)$$

(b) Per ogni $x \in \mathbb{R}$ fissato p_n è superiormente limitata. Pertanto $\exp(x) < +\infty$ per ogni x .

Infatti si ha

$$p_n(x) \cdot p_n(-x) = \left(1 + \frac{x}{n} \right)^n \cdot \left(1 - \frac{x}{n} \right)^n = \left(1 - \frac{x^2}{n^2} \right)^n$$

e dunque

$$0 < p_n(x) \cdot p_n(-x) < 1 \quad \forall n > |x| \tag{6}$$

ora, visto che $p_n(-x)$ è crescente, posto $n_0 = \min\{n \in \mathbb{N} : n > |x|\}$ avremo che

$$p_n(-x) \geq p_{n_0}(-x) \quad \forall n \geq n_0$$

da cui, tenendo anche conto dell'equazione (6), si ottiene

$$p_n(x) \leq \frac{1}{p_n(-x)} \leq \frac{1}{p_{n_0}(-x)}. \tag{7}$$

da cui la tesi. Osserviamo che la disuguaglianza (7) implica che $\exp(x) \leq \frac{1}{p_{n_0}(-x)}$.

(c) Vale l'identità algebrica

$$\left(1 + \frac{y}{n} \right)^n - \left(1 + \frac{x}{n} \right)^n = \frac{(y-x)}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(1 + \frac{y}{n} \right)^k \left(1 + \frac{x}{n} \right)^{n-k-1}.$$

(d) Dalla disuguaglianza precedente segue che, se $x \leq y \leq C$,

$$0 \leq \left(1 + \frac{y}{n} \right)^n - \left(1 + \frac{x}{n} \right)^n \leq \exp(C)(y-x)$$

(d) Dal punto (c) segue anche che, se $x \leq y$,

$$\exp(x)(y-x) \leq \exp(y) - \exp(x) \leq \exp(y)(y-x).$$

Pertanto \exp è una funzione *strettamente crescente*, inoltre per ogni $C \in \mathbb{R}$ fissato $\exp :]-\infty, C] \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione strettamente crescente.

(e) Se $x_n \rightarrow x$ allora $(1 + \frac{x_n}{n})^n \rightarrow \exp(x)$. (Conseguenza di (c) ponendo $y = x_n$ e passando al limite.)

La funzione \exp si chiama esponenziale in base naturale. La proposizione seguente recapitola le proprietà principali di \exp e giustifica, oltre al nome, anche la notazione $\exp(x) = e^x$.

Proposizione 3 *La funzione $\exp : (\mathbb{R}, +) \rightarrow (\mathbb{R}_+, \cdot)$ è un omomorfismo strettamente crescente. Valgono infatti le seguenti proprietà*

1. $\exp(x) \cdot \exp(y) = \exp(x+y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$. In particolare $\exp(0) = 1$, $\exp(-x) = [\exp(x)]^{-1}$.
2. $\exp(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.
3. $\exp(x) \geq 1 + x \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Dim: Se $x, y \in \mathbb{R}$, si ha che

$$\begin{aligned} \exp(x) \cdot \exp(y) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} (1 + \frac{x}{n})^n \cdot \lim_{n \rightarrow +\infty} (1 + \frac{y}{n})^n \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} (1 + \frac{x+y+xy/n}{n})^n = \exp(x+y) \end{aligned} \quad (8)$$

dove l'ultima uguaglianza segue da (e). Le altre proprietà seguono facilmente dalla definizione, dalla proprietà (1) o dalle osservazioni precedenti. #

Esercizi:

1. Dimostrare (per induzione) che

$$[\exp(x)]^n = \exp(nx) \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbf{Z}.$$

2. Sia $\exp(1) := e$ (e è detta la costante di Nepero). Mostrare che $2 < e < 3$.
3. Mostrare che $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ è surgettivo cioè che per ogni $b > 0$ l'equazione $e^x = b$ ha soluzione. [Sugg: provare che se $b \geq 1$ la successione $x_n = n(b^{1/n} - 1)$ è decrescente, inferiormente limitata e pertanto ammette un limite a che soddisfa l'equazione $e^a = b$.]

4. Calcolare

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \exp(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \exp(x) = +\infty. \quad (9)$$

5. Provare che per ogni $x, x' \in \mathbb{R}$ si ha $\exp(x) = \exp(x')(1 + x - x')$.
6. Mostrare che per ogni $x_0, x_1 \in \mathbb{R}$ e $t \in [0, 1]$ vale la disuguaglianza $\exp(tx_1 + (1-t)x_0) \leq t \exp(x_1) + (1-t) \exp(x_0)$ (ovvero la funzione esponenziale è convessa).
7. Mostrare che $\frac{1}{1+x} \leq \exp(x)$ per ogni $x < 1$.

8. Provare che

$$\frac{\exp(x) + \exp(-x)}{2} \geq 1$$

9. funzioni iperboliche ?????

1.3 La funzione logaritmo.

Nella sezione precedente (esercizio 4) abbiamo dimostrato che la funzione esponenziale in base naturale è bigettiva se come codominio prendiamo la sua immagine \mathbb{R}^+ . Quindi essa ammette un'inversa $\log : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ che viene chiamata funzione logaritmo e risulta essere un omomorfismo crescente da $(\mathbb{R}_+, \cdot) \rightarrow (\mathbb{R}, +)$. Valgono inoltre le seguenti proprietà

1. $\log(xy) = \log(x) + \log(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}_+$, in particolare $\log(1) = 0$ e $\log(x^{-1}) = -\log(x)$.
2. $\log(\mathbb{R}^+) = \mathbb{R}$;
3. $\log(1+x) \leq x \quad \forall x > -1$.

Esercizi:

1. Mostrare che, se $x > 0$, $\sqrt[n]{x} = \exp(1/n \log x)$.
2. Mostrare che $\log(x) \leq \log(x_0) + \frac{1}{x_0}(x - x_0)$ per ogni $x, x_0 \in \mathbb{R}_+$.
3. Dimostrare che per $\forall |x| < 1$ vale la seguente stima

$$\frac{x}{1+x} \leq \log(1+x) \leq x.$$

Dedurre che

$$\frac{1}{n+1} \leq \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

4. Utilizzare il risultato precedente per provare che

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \geq \log(n+1).$$

5. Mostrare che, se $0 < \delta \leq x < y$ allora

$$0 < \log y - \log x \leq \frac{y-x}{\delta}.$$

6. Dimostrare che il logaritmo è una funzione concava, ovvero

$$\log(tx + (1-t)y) \geq t \log x + (1-t) \log y \quad \forall t \in [0, 1] \quad x, y > 0$$

7. Dimostrare la seguente disuguaglianza (disuguaglianza di Young)

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}, \quad \forall a, b, p, q > 0, \quad : \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

[Suggerimento: sfruttare la concavità del logaritmo.]

1.4 L'esponenziale e il logaritmo in base qualunque.

1.5 La funzione esponenziale.

Sia $a > 0$ fissato, si consideri la seguente applicazione

$$\begin{aligned} \mathbf{Z} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ n &\longmapsto a^n \end{aligned}$$

tale funzione manda $(\mathbf{Z}, +)$ in (\mathbb{R}, \cdot) , trasformando somme in prodotti

$$a^{x+y} = a^x \cdot a^y \quad \forall x, y \in \mathbf{Z} \tag{10}$$

Se vogliamo **estendere** tale funzione a tutto \mathbb{R} in modo che la proprietà (10) sia verificata $\forall x, y \in \mathbb{R}$ basta porre

$$\exp_a(x) \stackrel{def}{=} \exp(x \log a).$$

È facile verificare che se $p/q \in \mathbb{Q}$ allora $\exp_a(p/q) = \sqrt[q]{a^p}$ pertanto in genere si usa la notazione $\exp_a(x) = a^x$. Inoltre con tale definizione la proprietà (10) è verificata su tutto \mathbb{R} .

Osserviamo inoltre che, se $a \neq 1$, si ha

$$\log(\exp_a(x)) = x \log(a), \quad \exp_a\left(\frac{\log x}{\log a}\right) = x$$

pertanto la funzione $x \mapsto \frac{\log x}{\log a}$ è l'inversa di \exp_a , viene chiamata il *logaritmo in base a* ed indicata col simbolo $\log_a(x)$, si noti che¹ $\log(x) = \log_e(x)$.

In effetti tutti i logaritmi differiscono unicamente per un fattore moltiplicativo:

$$\frac{\log_a x}{\log_b x} = \frac{\log b}{\log a} \quad \forall a, b \in \mathbb{R}_+ \setminus \{0\},$$

pertanto, se non c'è motivo particolare, utilizzeremo sempre il logaritmo in base naturale.

Esercizi: Dimostrare che

1. $(\log_a b)(\log_b a) = 1 \quad \forall a, b > 0$
2. $\log_a b = (\log_c b)(\log_a c)$
3. Mostrare la formula (già ben nota nel caso x, y fossero interi) $(a^x)^y = a^{xy} \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$
4. Le seguenti valutazioni del logaritmo sono numeri razionali; calcolarle senza l'ausilio della calcolatrice

$$\begin{array}{ccc} \log_3 27 & \log_3(1/9) & \log_3(1/\sqrt{3}) \\ \log_8(\sqrt{2}/2) & \log_4 8 & \log_{\sqrt{2}} 64 \end{array}$$
5. Mostrare che se $n, m \in \mathbb{N}^+$ e $m \leq \log_2 n < m + 1$ allora l'espressione di n in base 2 ha $m + 1$ cifre.
6. Dire, senza utilizzare la calcolatrice, quante cifre sono necessarie per esprimere il numero 2^{64} nell'usuale base 10.

¹Il logaritmo in base naturale si indica talvolta anche con $\ln(x)$.